Algebra-Aufgaben: *Mengenlehre 2b*

Weitere Aufgaben zur Darstellung von (mathematischen) Mengen in
der *aufzählenden Form* & der *mathematisch beschreibenden* Form

Zum Einstieg jeweils ein erklärtes Beispiel:

$$\mathbb{A} = \{a \in \mathbb{N} \mid a^x \leq 250 \text{ und } x \in \mathbb{T}_4\}$$

- Die Einleitung definiert die Lösungsvariable und die möglichen Lösungen, d.h. die Menge, aus welcher die Lösung sein muss:

  Lösungsvariable ist a und sie muss *natürlich* sein.

- Die Bedingungen
  - müssen den Ursprung aller weiteren Parameter definieren,

    $$x \in \mathbb{T}_4$$

  - und definieren, was die möglichen Lösungen erfüllen müssen um wirklich eine Lösung zu sein, also die eindeutige Bestimmbarkeit

    $$a^x \leq 250.$$

Wir suchen also aus der Mengen der natürlichen Zahlen all diejenigen Elemente, die als Basis für eine Potenz mit einem Exponenten, der ein Teiler von 4 ist, verwendet werden können, so dass die Potenz kleiner oder gleich 250 ist.

$$\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$$

1. Stelle die folgenden Mengen in der aufzählenden Form dar:

   (a) $\{a \in \mathbb{N}_g \mid a^x \leq 1000, \forall x \in \mathbb{T}_4\}$ = {2, 4}

   (b) $\{x \in \mathbb{N}_u \mid a^x \leq 1000, \forall a \in \mathbb{T}_4\}$ = {1, 3}

   (c) $\{a \in \mathbb{T}_4 \mid a^x \leq 1000, \forall x \in \mathbb{N}\}$ = {1}

   (d) $\{x \in \mathbb{T}_4 \mid a^x \leq 1000, \forall a \in \mathbb{N}\}$ = { }

   (e) $\{b \in \mathbb{Z} \mid b = 4r - 21 \text{ und } r \in \mathbb{N}\}$ = {-17, -13, -9, -5, ...}

   (f) $\{v \in \mathbb{N} \mid v = s^2 + 1 \text{ und } s \in \mathbb{T}_{12}\}$ = {2, 5, 10, 17, 37, 145}

   (g) $\{q \in \mathbb{T}_{100} \mid 5q + s > 100, \forall s \in \mathbb{N}_{\geq 50}\}$ = {20, 25, 50, 100}

   (h) $\{c \in \mathbb{N} \mid c = 3z - 20 \text{ und } z \in \mathbb{N}\}$ = {1, 4, 7, 10, ...}

   (i) $\{s \in \mathbb{Q} \mid s \in \mathbb{V}_2\}$ = {2, 4, 6, 8, ...}

   (j) $\{s \in \mathbb{Z} \mid s \in \mathbb{V}_2\}$ = {2, 4, 6, 8, ...}

   (k) $\{w \in \mathbb{N} \mid s \in \mathbb{V}_2\}$ = {1, 2, 3, 4, ...}

   (l) $\{w \in \mathbb{N} \mid w \in \mathbb{V}_2\}$ = {2, 4, 6, 8, ...}

$$\{-20, -8, 4, 16, 28, \dots 148, 160\}$$

- Wir definieren unsere eigene Lösungsvariable und legen fest, aus welcher Menge sie ist

$$p \in \mathbb{Z}$$

- Wir beschreiben die Eigenschaften der Elemente:

$$\geq -20 \text{ und } \leq 160 \text{ und konstante Differenz von } 12$$

- Wir formulieren unsere Lösung:

$$\{p \in \mathbb{Z} \mid p = -20 + r \cdot 12 \text{ und } r \in \mathbb{N}_0 \text{ und } p < 170\}$$

oder

$$\{p \in \mathbb{Q} \mid P = -32 + r \cdot 12 \text{ und } r \in \mathbb{N}_{\leq 16}\}$$

Beachte, die mathematisch beschreibende Darstellung ist nicht eindeutig bestimmt, die Menge selber aber schon.

2. Stelle die folgenden Mengen in der mathematisch beschreibenden Form dar:

   (a) $\{2, 4, 6, \dots, 222\}$ $= \{x \in \mathbb{V}_2 / x < 224\}$
   (b) $\{1, 8, 15, 22, \dots\}$ $= \{x \in \mathbb{N} / x = 1 + t \cdot 7 \text{ und } t \in \mathbb{N}_0\}$
   (c) $\{99, 88, 77, 66, \dots\}$ $= \{x \in \mathbb{Z} / x = 11 \cdot t \text{ und } t \in \mathbb{Z}_{\leq 9}\}$
   (d) $\{2, 5, 10, 17, 26, \dots, 82, 101\}$ $= \{x \in \mathbb{N} / x = t^2 + 1 \text{ und } t \in \mathbb{N}_{\leq}$
   (e) $\{77, 84, 91, 98, \dots\}$ $= \{y \in \mathbb{V}_7 / y \geq 77\}$
   (f) $\{2, 6, 18, 54, \dots\}$ $= \{q \in \mathbb{N} / q = 2 \cdot 3^s \text{ und } s \in \mathbb{N}_0\}$
   (g) $\{0, 3, 6, 9\}$ $= \{a \in \mathbb{N}_0 / a = 3 \cdot p \text{ und } p \in \mathbb{N}_{0 \leq 3}\}$
   (h) $\{\dots, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ $\{v \in \mathbb{Q} / v = 1 - s \cdot 0.25 \text{ und } s \in \mathbb{N}_0\}$
   (i) $\{-1, 2, -4, 8, -16, 32, \dots\}$ $= \{c \in \mathbb{Z} / c = (-2)^p \cdot (-1) \text{ und } p \in \mathbb{N}_0\}$
   (j) $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{729}\}$ $= \{r \in \mathbb{Q} / r = \frac{1}{3^t} \text{ und } t \in \{0, 1, 2, .., 6\}\}$
   (k) $\{1, 10, 19, 28, \dots, 1000\}$ $= \{x \in \mathbb{N} / x = 1 + t \cdot 9 \text{ und } t \in \mathbb{N}_0 \text{ und } t \leq 111\}$
   (l) $\{3, 21, 147, 1029, \dots\}$ $= \{x \in \mathbb{N} / x = 3 \cdot 7^t \text{ und } t \in \mathbb{N}_0\}$