Termumformungen - Ausbau

ALGEBRA Kapitel 2

WRProfil - Gymnasiale Mittelstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

18. September 2023

Überblick über die bisherigen *ALGEBRA* - Themen:
(in den MNProfil-Versionen)

Inhaltsverzeichnis

2 Termumformungen - Ausbau

In diesem Kapitel geht es darum, eine gemeinsame und sichere Basis für einen zentralen Bereich der Algebra

die **Termumformungen**

zu schaffen.

Wir sprechen von einem *Ausbau*, da Grundfertigkeiten schon vorhanden sein sollten. Da dieses Grundwissen an verschiedenen Sekundarschulen oder Untergymnasien erarbeitet wurde und demzufolge in Tiefe und Umfang unterschiedlich sein kann, beginnen wir mit einer *schnellen* Zusammenstellung und Repetition der wichtigsten Grundbegriffe und -operationen an einfachen Beispielen.

> **Ganz wichtig** ist, dass ihr euch meldet, wenn bei dieser Repetition z.B. Begriffe nicht klar oder Operationen noch unbekannt sind !! Wir werden und uns dann die Zeit nehmen, die Löcher zu stopfen. Es werden auch genügend Aufgaben vorhanden sein, um mögliche Schwächen und Unsicherheiten mit Hilfe von Übungen anzugehen.

Im Abschnitt*Rechnen mit Polynomen* werden wir uns dann mit den Binomischen Formeln und ein weiteres mal mit der Faktorzerlegung beschäftigen.

Im letzten Abschnitt werden wir uns mit *dem Rechnen mit Brüchen* befassen. Das Ziel wird sein, Ausdrücke der folgenden Art

$$\frac{\dfrac{4a^2-9b^2}{(2a+3b)^2}-\dfrac{2a+3b}{2a-3b}}{\dfrac{(2a+3b)^2}{4a^2-9b^2}-\dfrac{4a^2-9b^2}{4a^2+12ab+9b^2}}$$

vereinfachen zu können.

Ganz wichtig sind die Aufgaben und das Lösen der Aufgaben.
Wir verwenden dazu *Deller/Gebauer/Zinn* **Algebra 1**
Bei der *Angabe der Aufgaben* wird zuerst der Aufgabenpool angegeben, welcher Aufgaben zum aktuellen Stoff und freiwilligen Lösen beinhaltet **;** anschliessend die Aufgaben, welche mindestens gelöst werden sollten.

2.1 Grundbegriffe

Wir beginnen mit der Definition und Erklärung einiger mathematischer Begriffe, die ihr kennen *müsst*:

- *Term*

  Bsp.:

- *Verknüpfung*

  Bsp.:

- *Termumformung*

  Bsp.:

Bem.: Durch *korrekte* Termumformungen erhalten wir zueinander *äquivalente* Terme. Das sind Terme, die *gleich*, aber doch *nicht ganz gleich* sind.
(Zueinander *äquivalente* Terme sind in ihrem Wert, ihrem Inhalt oder in ihrer Aussage gleich, in ihrer Form oder Darstellung können sie verschieden sein!)

Korrekte Termumformungen erhalten wir, in dem wir uns bei den Umformungen an die folgenden *Grundgesetze* halten:

- *Kommutativgesetz*

- *Assoziativgesetz*

- *Distributivgesetz*

und die *Klammerregeln* einhalten:

Beispiel 2.1 Wir definieren die folgende Verknüpfung auf $\mathbb{R}$:

$$a * b := a^2 - ab + b^2 \ , \ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Berechne

1. $5 * 2 =$

2. $(-1) * 0 =$

3. $2 * 5 =$

Aufgaben 2.1 *Definiere die folgenden Begriffe:*

- **Summe**
- **Summand**
- **Subtrahend**
- **Minuend**
- **Differenz**
- **Divisor**
- **Dividend**
- **Quotient**
- **Faktor**
- **Produkt**

Aufgaben 2.2 *In den folgenden Beispielen sind jeweils die* Summen, Summanden, Subtrahenden, … *zu bezeichnen:*

1. $88x - (5 + 3w)$

2. $(6z + 8) : 7z + 12$

Aufgaben 2.3 *Untersuche die Verknüpfung* $\diamond$*, mit*

$$r \diamond s := r^4 + 2rs + 2^2 \ , \ \forall r, s \in \mathbb{R}$$

auf Assoziativität und Kommtativität.

2.1.1 Anwendungen des Distributivgesetzes

- *Ausmultiplizieren*

  Beispiel 2.2
  i. $5x \cdot (3a + b) =$

  ii. $5x \cdot (3a + b - c) =$

- *Ausdividieren*

  Beispiel 2.3
  i. $(-24ax^2 + 12bx - 18x^2) : 6x =$

  ii. $(-24ax^2 + 12bx - 18x^2) : 6 \cdot x =$

  iii. $(6x^2y^5 - 12x^3y^4 + 24x^3y^3) : \frac{1}{2}x^2y =$

- *Ausklammern*

  Beispiel 2.4
  i. $abc + ab + a =$

  ii. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{8}a^3 =$

  iii. $2r^3t^2 - r^2t^3 + 5r^2t^2 =$

- *Mehrfache Anwendung des Distributivgesetzes*

Beispiel 2.5

i. $(3a + b)(c + 2d) =$

ii. $(5x + 2)(3x - 1) =$

iii. $(x - 5)(x - 3) =$

iv. $(x + 1)(x - 2)(x + 3) =$

v. $(x - 1) \cdot x \cdot (x + 2) \cdot 3$

Wer die obigen Umformungen noch etwas üben möchte, findet genügend Aufgaben mit Lösungen unter:

Aufg.: *Einfache Termumformungen*

2.2 Einfache Beweisführungen in der Mathematik

Wir wollen uns nun ein erstes mal mit der *Beweisführung* in der Mathematik beschäftigen.
Beim *Beweisen* einer Behauptung geht es darum, unter Verwendung von gesicherten Kenntnissen, z.B. den Rechengesetzen oder schon bewiesenen Regeln und Aussagen, die Behauptung herzuleiten oder zu verifizieren und damit für *gültig/ richtig* zu erklären.
Diese bewiesene Behauptung kann dann als eine gesicherte Erkenntnis für den Beweis weiterer Behauptung verwendet werden; und so weiter ...

Wir werden die Idee der Beweisführung immer wieder an einigen Beispielen besprechen und uns erst zu einem späteren Zeitpunkt vertieft mit diesem Thema beschäftigen.

Beispiel 2.6

- Beh.: $(3a+b)^2 = 9a^2 + 6ab + b^2$

- Beh.: $(2r-4s)^2 = 4r^2 - 16rs + 16s^2$

Beispiel 2.7 Nur und ausschliesslich nur mit den Grundgesetzen wollen wir beweisen:

$$(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$$

Aufgaben 2.4 *Wir definieren die folgende Verknüpfung auf* $\mathbb{R}$*:*

$$a * b := a^2 + ab \ , \ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

1. *Berechne:*
   - $5 * 2 =$
   - $(-1) * 0 =$
   - $1 * 2 * 3 =$
   - $((-1) * 1) * (2 * (-2)) =$

2. *Beweise oder widerlege die folgenden Behauptungen:*
   (a) *Beh.:* $a * a = 2a^2 \ , \ \forall a \in \mathbb{R}$

   (b) *Beh.:* $(x^2 * x) - (x * x^2) = x^4 - x^2 \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$

3. *Untersuche* $*$ *auf Kommutativität:*

2.3 Das Rechnen mit Polynomen

Wir werden in diesem Kapitel eine neue Form eines mathematischen Terms, das *Polynom*, einführen und die Grundoperationen Addition, Subtraktion und Multiplikation (die Division wird im nächsten Kapitel *Das Rechnen mit Brüchen* besprochen) auf das Polynom wirken lassen.
In diesem Zusammenhang werden wir auch die *Binomischen Formeln* kennenlernen, zur Berechnung höherer Potenzen von Binomen das *Pascal'sche Dreieck* verwenden und die *Potenzgesetze mit natürlichen Exponenten* besprechen.

2.3.1 Grundbegriffe & Definitionen

Def.: Ein **Polynom n-ter Ordnung (in x)** ist ein mathematischer Ausdruck der folgenden Form:

$$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \ \ldots \ + a_n \cdot x^n$$

mit $a_i, x \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$ und $a_i = konst.$

Beispiel 2.8

- $2 + 3x + 4x^2$
  ist ein Polynom ...
  mit $a_0 =$
  $a_1 =$
  $a_2 =$

- $5 - 0.2x + 3x^2 - \sqrt{8}x^3$
  ist ein Polynom ...
  mit $a_0 =$
  $a_1 =$
  $a_2 =$
  $a_3 =$

- $2x^2 + 1 - 5x$
  ist ein Polynom ...
  mit $a_0 =$
  $a_1 =$
  $a_2 =$
  $a_3 =$

Aufgaben 2.5

- $3x^2 - 9x^{33}$
  ist ein Polynom ...
  mit $a_0 =$
  $a_1 =$
  $a_2 =$
  $a_3 =$
  $\ldots = -9$

- $3x^2 - 66x^{78} + 12x^{54}$
  ist ein Polynom ...
  mit $a_0 =$
  $a_1 =$
  $a_2 =$
  $a_3 =$
  $\ldots = -66$
  $\ldots = 12$
  $\ldots = 54$
  $a_{100} =$

- $5x^7a^3 - 2b^8a^2x^4 + 3abx$
  ist ein Polynom ...

- *Gib ein Beispiel eines*

  1. *Polynoms 6ter Ordnung ...*
  2. *Polynoms 54ten Grades ohne konstantes Glied und mit quadratischem Koeffizienten ...*

<u>*Bem.:*</u>

-
-

Das *Rechnen mit Polynomen* entspricht den uns schon bekannten Termumformungen, daher *nur* die folgenden Aufgaben zum selber lösen:

Aufg.: 9-106 ;
9b, 10b, 36b, 43a, 44c, 52b, 54b, 62f, 83a, 88b, 95b, 104b

2.3.2 Die Binomischen Formeln

Beim Quadrieren vom Binomen kann die Kenntnis der folgenden Formeln Vorteile bringen:

$$
\begin{aligned}
(A+B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \\
(A-B)^2 &= A^2 - 2AB + B^2 \\
(A+B)(A-B) &= A^2 - B^2
\end{aligned}
$$

Bevor wir die *binomischen Formeln* anwenden, werden wir sie beweisen:

Aufgaben 2.6 *Beweise die binomischen Formeln:*

Beweise die 2.bin. Formel mit Hilfe der 1.bin. Formel:

Die *binomischen Formeln* lassen sich auch geometrisch beweisen.

Aufgaben 2.7 *Suche im Internet die zugehörigen Beweise:*

Beispiel 2.9 i. $(x+2y)^2 =$

ii. $(3a-5)^2 =$

iii. $(4xy+2x)^2 =$

iv. $(3x+6)(3x-6) =$

v. $(4s-5)(4s+5) =$

vi. $(-4s+5)(4s+5) =$

vii. $(4s-5)(-4s+5) =$

viii. $(-4s+5)^2 =$

ix. $(-4s-5)^2 =$

Aufg.: 135 - 172 (ohne 166 - 168) ;
139c, 142b, 144b, 149a, 150b, 151a, 156a, 169c, 171d, 172c

Anwendungen der binomischen Formeln auf *das Rechnen mit Zahlen:*

Die binomischen Formeln lassen sich auch auf *Trinome* anwenden:

Beispiel 2.10 x. $(a + 2b + c)^2 =$

xi. $(r^2 - 5x + q)^2 =$

xii. $(x + 2y - 3)(x - 2y + 3) =$

Aufg.: 159 - 190 (ohne 166 - 168, 179) ;
159b, 176b, 177, 182a, 183a, 184c, 190b

Bevor wir uns mit höheren Potenzen von Binomen und dem Pascal'schen Dreieck beschäftigen, wollen wir kurz die *Potenzgesetze mit natürlichen Exponenten* besprechen:

Notation : 5^3 heisst
mit
und bedeutet:

Verallgemeinert gilt: $a^n :=\ \dots$
mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$
heisst ...
mit

Beispiel 2.11 i. $a^6 \cdot a^2 =$

Verallgemeinert gilt: $a^n \cdot a^m =\ \dots\dots$
mit $a \in \mathbb{R}^+,\ m, n \in \mathbb{N}$

ii. $a^6 : a^2 =$

Verallgemeinert gilt: $a^n : a^m =\ \dots\dots$
mit $a \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{N}, n \geq m$

iii. $(a^6)^2 =$

Verallgemeinert gilt: $(a^n)^m =\ \dots\dots$
mit $a \in \mathbb{R}^+,\ m, n \in \mathbb{N}$

Aufgaben 2.8 *Vereinfache die folgenden Terme:*

1. $x^2 \cdot x^7 : x^5 =$
2. $x^2 \cdot (x^7 : x^5) =$
3. $d^2 \cdot d^3 : d^5 =$
4. $ab^2 \cdot a^2b^3 \cdot a^3b^4 =$
5. $r^2s^5t^3 \cdot r^3t^7 : s^4t^6 =$
6. $(a^2)^4 \cdot a^4 =$
7. $a^{3^2} : (a^3)^2 =$
8. $q^3 \cdot q^5r^5 : (r^2q^4)^2 =$

Lernaufgabe : In dieser Aufgabe sollst Du, geführt durch die gestellten Aufgaben, selbständig das Pascal'sche Dreieck als Hilfsmittel zur Bestimmung höherer Potenzen von Binomen kennenlernen.

- Berechne die folgenden Potenzen ...

$$(a+b)^0 =$$
$$(a+b)^1 =$$
$$(a+b)^2 =$$
$$(a+b)^3 =$$
$$(a+b)^4 =$$

- Ergänze mit Deinen Resultaten die fehlenden Koeffizienten im folgenden *Dreieck* ...

$$\begin{array}{lc}
(a+b)^0 = & \dots \\
(a+b)^1 = & \dots a + \dots b \\
(a+b)^2 = & \dots a^2 + \dots ab + \dots b^2 \\
(a+b)^3 = & \dots a^3 + \dots a^2 b + \dots ab^2 + \dots b^3 \\
(a+b)^4 = & \dots a^4 + \dots a^3 b + \dots a^2 b^2 + \dots ab^3 + \dots b^4
\end{array}$$

- Untersuche, wie sich die Koeffizienten im Dreieck entwickeln und bestimme *nur* mit Hilfe des Dreiecks ...

$$(a+b)^5 =$$
$$(a+b)^6 =$$
$$(a+b)^7 =$$

Kontrolliere Deine Resultate bei mir.

- Berechne die folgenden Potenzen ...

$$
\begin{aligned}
(a-b)^0 &= \\
(a-b)^1 &= \\
(a-b)^2 &= \\
(a-b)^3 &= \\
(a-b)^4 &=
\end{aligned}
$$

- Ergänze mit Deinen Resultaten die fehlenden Koeffizienten im folgenden *Dreieck* ...

$$
\begin{array}{lccccccccc}
(a-b)^0 = & & & & & \ldots & & & & \\
(a-b)^1 = & & & & \ldots a & \cdots & \ldots b & & & \\
(a-b)^2 = & & & \ldots a^2 & \cdots & \ldots ab & \cdots & \ldots b^2 & & \\
(a-b)^3 = & & \ldots a^3 & \cdots & \ldots a^2b & \cdots & \ldots ab^2 & \cdots & \ldots b^3 & \\
(a-b)^4 = & \ldots a^4 & \cdots & \ldots a^3b & \cdots & \ldots a^2b^2 & \cdots & \ldots ab^3 & \cdots & \ldots b^4
\end{array}
$$

- Untersuche, wie sich die Koeffizienten im Dreieck entwickeln und bestimme *nur* mit Hilfe des Dreiecks ...

$$
\begin{aligned}
(a-b)^5 &= \\
(a-b)^6 &= \\
(a-b)^7 &=
\end{aligned}
$$

Aufgaben 2.9 *Fasse die Regeln in eigenen Worten zusammen:*

Beispiel 2.12 Multipliziere die folgenden Terme aus:

i. $(3x+4)^4 =$

ii. $(2-5x^2)^3 =$

iii. $(\frac{1}{2}c^2d+2dc^2)^6 =$

Aufg.: 166 - 168, 179 ; 167b, 168d, 179a

2.3.3 Faktorzerlegung

Wir wollen das Kapitel *Rechnen mit Polynomen* mit der Umkehrung des Ausmultiplizierens, der sog. *Faktorzerlegung* abschliessen:

$$\begin{array}{ccc} (2x+y)(2x-y) & \overset{ausmultipizieren}{\rightsquigarrow} & 4x^2 - y^2 \\ 4x^2 - y^2 & \overset{faktorisieren}{\rightsquigarrow} & (2x+y)(2x-y) \end{array}$$

Auch dieses Thema werden wir anhand vieler Beispiele besprechen. Ich möchte hier noch ausdrücklich auf die grosse Bedeutung dieses Abschnitts hinweisen.
Die Faktorzerlegung wird uns immer wieder begegnen; beim *Rechnen mit Brüchen*, beim *Lösen von Gleichungen höherer Ordnung*, bei der *Bestimmung von Nullstellen*, ...

Beispiel 2.13 *Einfaches Ausklammern* -
eine reine Anwendung des Distributivgesetzes

i. $2a + 2b =$

ii. $12t^2q - 4t^3z =$

iii. $r^4 - r^2 =$

Idee:

Aufg.: 195 - 210 ;

Weitere Anwendungen:

Beispiel 2.14 Zerlege die folgenden Terme *vollständig* in Faktoren:

i. $r(s+t) - t(t+s) =$

ii. $(x+y) + (2x+2y) =$

iii. $(36rs^2 - 24s^2) - (3rs - 2s) =$

iv. $q^2(a-b+c) - q^2(a+b-c) =$

v. $(s^4 - s^2)(t+2) - (t-1)(s^4 - s^2) =$

vi. $a(b-c) + b(b-c) + c(c-b) =$

Idee:

Aufg.: 213 - 226 ;
213b, 217a, 219b, 220a, 223c, 226c

Beispiel 2.15 *Ausklammern in Teilsummen* (Mehrfaches Ausklammern)

i. $ax - ay + bx - by =$

ii. $ab + b + v + av - a^2 - a =$

iii. $2(a + b) - a - b =$

iv. $q^3 - q^2 - (q - 1)t^2 =$

v. $6a^2b - 3ab^2 - 2a + b =$

vi. $(a + 2b)(3ux - vy) - (uy - 3vx)(a + 2b) =$

Idee:

Aufg.: 227 - 236 ;
228a, 232b, 233d, 234a, 235b

Beispiel 2.16 Faktorzerlegung mit Hilfe der binomischen Formeln

Rep.: Formuliere die binomischen Formeln:

I.

II.

III.

i. $25r^2 - 9 =$

ii. $x^4 - t^8 =$

iii. $(3x + 7y)^2 - (5x)^2 =$

iv. $64a^2 - (a^2 + 16)^2 =$

v. $u^2 + 12u + 36 =$

vi. $x^2 - 8x + 16 =$

vii. $4c^2 - 12c + 9 =$

viii. $x^4 + 2x^2y + y^2 =$

Bem.: Diese Art der Faktorzerlegung mit Hilfe der 1. & 2. binomischen Formel geht *nicht* immer!
Folgende Bedingungen sind für die Anwendung dieser Formeln notwendig:

- ◇ ...

  Falls *nein* $\Rightarrow$ ...

  Falls *ja* $\Rightarrow$ ...

- ◇ ...

  Falls *ja* $\Rightarrow$ ...

  Falls *nein* $\Rightarrow$ ...

Beispiele :

i. $16x^4 - 8x^2y^2 + y^6 =$

◇

◇

ii. $4r^2 + 4rs + s^2 =$

◇

◇

iii. $9x^4 - 30x^2r^2 + 25r^4 =$

◇

◇

iv. $\frac{4}{9}s^2 + \frac{16}{15}st + \frac{16}{25}t^2 =$

◇

◇

Aufg.: 237 - 248 ;
239b, 240c, 241b, 244a, 245a,c, 247a, 248b

Beispiel 2.17 *Faktorzerlegung mit Hilfe eines Klammeransatzes*

<u>*Beispiel:*</u> $a^2 + 5a + 6$ hat

...

...

...

und trotzdem lässt sich dieses Polynom faktorisieren.

Wir gehen davon aus, dass sich das Polynom in Faktoren zerlegen lässt und setzen daher

$$\begin{aligned} a^2 + 5a + 6 &= (a+?)(a+?) \\ &= (a+x)(a+y), \quad \text{mit } x, y =? \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Durch *Koeffizientenvergleich* folgt, dass das gesuchte Zahlenpaar (x, y) die folgenden Bedingungen erfüllen muss:

$$\left.\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

Beispiel 2.18 i. $a^2 + 5a - 6 = (a+x)(a+y)$

$$\text{mit} \quad \left.\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \Rightarrow \; x = \; \ldots \quad \text{und} \quad y = \; \ldots$$

ii. $x^2 + 7x + 12 = (x + q)(x + r)$

$$\text{mit} \quad \left.\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \Rightarrow \; q = \;\ldots \quad \text{und} \quad r = \;\ldots$$

iii. $q^2 + q - 132 = \;\ldots$

$$\text{mit} \quad \left.\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \Rightarrow \; .. = \;\ldots \quad \text{und} \quad .. = \;\ldots$$

iv. $z^2 - 5tz + 4t^2 = \;\ldots$

$$\text{mit} \quad \left.\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \Rightarrow \; .. = \;\ldots \quad \text{und} \quad .. = \;\ldots$$

v. $3x^2 - 36x + 108 = \;\ldots$

Fasse die Idee des Klammeransatzes in eigenen Worten zusammen:

Aufg.: 249 - 258 ;
249a,d, 254d,e, 255a,b, 257c

Aufgaben 2.10 *Verallgemeinere unseren* Klammeransatz *auf ein Polynom 2.ter Ordnung von folgender Form:*

$$x^2 + bx + c$$

Formuliere einen Algorithmus, um ein allgemeines Polynom 2. Ordnung der Form

$$ax^2 + bx + c$$

in Faktoren zu zerlegen und teste Deinen Algorithmus an zwei eigenen Beispielen.

Aufgaben 2.11 *Zerlege vollständig in Faktoren:*

1. $2x^2 - 5x + 2 =$

2. $4c^2 + 3e - 1 =$

Beispiel 2.19 *Einige schöne Beispiele zum Abschluss:*

i. $-3z^4 + 6z^3 + 24z^2 =$

ii. $r^2 - 4s^2 + 12st - 9t^2 =$

iii. $27ef - 18eg + 9f^2 - 12fg + 4g^2 =$

Aufg.: 259 - 282 (ohne 279b, 280b)

2.4 Das Rechnen mit Brüchen

Wir werden in diesem Kapitel *das Rechnen mit Brüchen* besprechen.
Da für euch das Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren von Brüchen schon bekannt sein sollte, werden wir nur kurz die Grundbegriffe und Definitionen wiederholen und nach wenigen Beispielen schnell zu den interessanten Aufgaben vorstossen.
Bei der Division von Brüchen werden wir dann neu das schriftliche Dividieren von Brüchen, den sog. *Divisionsalgorithmus* kennenlernen.

2.4.1 Grundbegriffe & Definitionen

Def.: Ein **Bruch** ist ein Term von folgender Form: $\frac{a}{b}$
mit $a, b =$ beliebige Terme und ...

Bem.:

- a heisst ...
  b heisst ...

- Die Menge aller Brüche werden zusammengefasst in ...
  und diese Menge ist *abgeschlossen* bzgl. $+, -, :, \cdot$, d.h.: ...

- Einen Bruch **kürzen** heisst ...

- Einen Bruch **erweitern** heisst ...

- Zwei Brüche **gleichnamig machen** heisst ...

- kürzen und erweitern sind sog. **Äquivalenzumformungen**

Beispiel 2.20 Die folgenden Brüche sind vollständig zu kürzen:

i. $\dfrac{5x^2y^7}{10xy^8} =$

ii. $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} =$

iii. $\dfrac{x^4-x^2}{x^3+2x^2+x}$

iv. $\dfrac{p^2-4pq-45q^2}{4p^2-4pq-120q^2}$

Aufg.: 13 - 32, 35, 36, 41, 42 ;
18b, 19d, 24b, 25c, 31c, 35a, 41c

Aufgaben 2.12 *Beweise die folgenden Gleichungen:*

1. $(x^4 - 1) : [x(x^2 + 1) + x^2 + 1] = x - 1$

2. $\dfrac{(x-y)x + y(x-y)}{x^2 - y^2} = 1$

2.4.2 Addition & Subtraktion von Brüchen

Def.:	• Zwei Brüche **addieren** heisst ...
	• Zwei Brüche **subtrahieren** heisst ...

Beispiel 2.21

i. $\frac{f}{2} + \frac{f}{3} =$

ii. $\frac{q^2}{q+1} - q =$

iii. $\frac{4}{x-1} + \frac{x}{x^2-1} =$

iv. $\frac{cb}{a-b} + \frac{ac}{b-a} =$

v. $\frac{5}{r^2+r-6} - \frac{3}{r^2-r-2} =$

Aufg.: 55 - 87 ;
58b, 66b, 70c, 71c, 73d, 75b, 76b, 85a,b

Aufgaben 2.13 *Beweise zuerst die folgende Gleichung*

$$q^3 - 1 = (q-1)(q^2+q+1)$$

und verwende sie, um den folgenden Term zu vereinfachen:

$$\frac{1}{q-1} - \frac{q^2+2}{q^3-1}$$

Aufgaben 2.14 *Vereinfache:* $\dfrac{250p^4 - 2p}{5p^2+29p-6}$

2.4.3 Multiplikation von Brüchen

Def.:	• Zwei Brüche **multiplizieren** heisst ...

Beispiel 2.22

i. $(5a+5b) \cdot \dfrac{8c}{12a+12b} =$

ii. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \cdot \dfrac{x+y}{x-y} =$

iii. $\dfrac{a-b}{1-a^2} \cdot \dfrac{a^2-1}{b-a} =$

iv. $(\dfrac{r}{2} - \dfrac{1}{r})^2 =$

Aufg.: 91 - 116 ;
95c, 100c,d, 107a, 110b, 111c, 116a

2.4.4 Division von Brüchen

Def.:	• Zwei Brüche **dividieren** heisst ...

Beispiel 2.23 i. $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+2ab} : \dfrac{a^2+ab-a-b}{2ab+4b^2} =$

ii. $\dfrac{g^2+\dfrac{1}{g}}{g+\dfrac{1}{g^2}} =$

iii. $\left(\dfrac{2}{a-1}+a+1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{a^2-1}-\dfrac{2a}{a^4-1}\right) =$

Aufg.: 117 - 152, 157 - 168 ;
130a, 133a,b, 134a, 146a,c, 152d, 167

Aufgaben 2.15 *Bei der folgenden Rechnung wird das richtige Resultat auf falschem Weg erhalten:*

$$\frac{1}{a-2}+\frac{1}{a+5}-\frac{2a+3}{(a-2)(a+5)} = \frac{2}{2a+3}-\frac{2a+3}{(a-2)(a+5)}$$

$$= \frac{2}{(a-2)(a+5)}$$

$$= \frac{2}{a^2+5a-2a-10}$$

$$= \frac{0}{a^2+3a-5}$$

Bestimme bei jedem Schritt,

- *was gemacht wurde,*
- *was falsch ist,*
- *wie's richtig wäre.*

2.4.5 Divisionsalgorithmus

Abschliessend wollen wir noch die *schriftliche Division* von Polynomen besprechen und zum Einstieg an zwei Beispielen die schriftliche Division zweier natürlicher Zahlen besprechen:

Beispiel 2.24 i. $4094 : 23$

ii. $105825 : 17$

Ein kleiner Hinweis: Mit Hilfe der schriftlichen Division können wir den Dividenden in zwei Faktoren zerlegen:

-
-

Wir können auf sehr ähnliche Weise bei der schriftlichen Division zweier Polynome Vorgehen:

Beispiel 2.25 i. $(6x^3 + 16x^2 - 7x - 10) : (3x + 2) =$

ii. $(-80x + 16x^2 + 32 - 40x^3) : (-5x + 2) =$

Das Vorgehen bei der schriftlichen Division zweier Polynome können wir durch folgenden Algorithmus, den sog. *Divisionsalgorithmus*, beschreiben:

1. Ordne Dividend und Divisor nach fallenden Potenzen,
2. dividiere den ersten Summanden des Dividenden durch den ersten Summanden des Divisors,
3. multipliziere das Ergebnis mit dem Divisor und subtrahiere vom Dividenden,
4. wiederhole das Verfahren mit dem sich so ergebenden Rest ...

Beispiel 2.26 iii. $(2x^3 + 3) : (x - 1) =$

Aufgaben 2.16 *Führe die folgenden Divisionen selbständig durch:*

1. $(6x^3 - 14x^2 + 17x - 12) : (3x - 4) =$

2. $(k^5 - 1) : (k - 1) =$

3. $(10p - p^2 - 25 + 9p^4) : (3p^2 + p - 5) =$

4. $(6a^3 - 17a^2 + 21a - 30) : (2a - 5) =$

Aufgaben 2.17 *Wie lassen sich die Ergebnisse des Divionsalgorithmus selber kontrollieren?*

Formuliere ein Abbruchkriterium *für den Divisionsalgorithmus* mit *Rest:*

Formuliere eine eigene Aufgabe für den Divisionsalgorithmus (ohne *Rest):*

Kürze: $$\frac{5x^6 - 15x^5 + 2x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 9x}{x^2 - 3x}$$

Aufgaben 2.18 *Das folgende Polynom ist vollständig in Faktoren zu zerlegen:*

$$x^4 + 7x^3 - 59x^2 + 7x - 60$$

Hinweis: *Ein Faktor ist* $(x^2 + 1)$.

Aufgaben 2.19 *Löse die* eigene Aufgabe *deines Banknachbarn.*

Aufgaben 2.20 *Beweise:*

$$\frac{\dfrac{4a^2-9b^2}{(2a+3b)^2}-\dfrac{2a+3b}{2a-3b}}{\dfrac{(2a+3b)^2}{4a^2-9b^2}-\dfrac{4a^2-9b^2}{4a^2+12ab+9b^2}} \;=\; -1$$

Aufgaben 2.21 *Ein schönes Beispiel zum Abschluss:*

$$\frac{2}{(s-2)^2} + \frac{8}{(s^2+2s)(s-2)^2} - \frac{2}{s^2-4} + \frac{s}{s^2+4s+4} + \frac{4(s^2-5s-6)}{(s-2)^2(s+2)^2}$$

2.5 *Meine* Zusammenfassung