Die Zahl e

Diplomarbeit
zur
Erlangung des Magistergrades

an der
Formal- und Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Wien

Eingereicht von
Stefan Schönhacker

Betreut von
Ao. Univ.-Prof. Dr. Gerhard Kowol

Wien, im Mai 2000

Our selfish lives have made us all go blind
one Day we´ll awake by a bright light on the Horizon
in one second every eye will see the same
and this blinding light will draw our Attention

[Apoptygma Berzerk: Eclipse]

For TMG

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung ... 6
1. Historische Entwicklung ... 8
1.1 Die Entstehung der Logarithmen ... 8
1.2 Addieren statt Multiplizieren ... 8
1.3 Auftreten der Eulerschen Zahl ... 10
1.4 Die Rolle Eulers ... 11
1.4.1 Zur Reihendarstellung ... 11
1.4.2 Exkurs: Leonhard Euler ... 14
1.4.3 Eulers Hauptwerke ... 16
2. e – mathematisch betrachtet ... 17
2.1 Verschiedene Definitionen von e ... 17
2.1.1 Existenz von e bei der Definition als unendliche Summe ... 21
2.1.2 Annäherung: schnell oder langsam? ... 23
2.1.3 Exkurs: Kettenbruchentwicklung ... 23
2.2 Die Irrationalität von e ... 26
2.3 Die Transzendenz von e ... 28
2.4 $f(x)=e^x$ ... 29
2.4.1 Allgemeine Exponentialfunktion ... 32
2.4.2 Die Ableitung der e-Funktion ... 32
2.4.3 Eigenschaften der e-Funktion ... 33
2.4.4 Kurvendiskussion ... 34
2.4.5 Der Graph der e-Funktion ... 36
2.4.6 Rechenregeln für Exponenten ... 37
2.5 e^q – die logarithmische Spirale ... 39
2.5.1 Vorkommen ... 41
2.5.1 Exkurs: Archimedische Spirale ... 42
2.6 Die Exponentialfunktion im Komplexen ... 43
2.6.1 Einführung ... 43
2.6.2 Sinus und Cosinus im Komplexen ... 43
2.6.3 Spezialfall: e^{iy} ... 43
2.6.4 Die Euler-Gleichung ... 44
2.6.5 Periodizität ... 45
2.6.6 $e^z=e^{x+iy}$ ... 45
2.6.7 Die allgemeine Exponentialfunktion im Komplexen ... 46
2.7 Der Logarithmus im Reellen und im Komplexen ... 47
2.7.1 Definition ... 47
2.7.2 Eigenschaften ... 47
2.7.3 Logarithmus im Komplexen ... 49

3. Praktische Anwendungen 50
3.1 „Exponentialgesetz“ (Einleitung in einem Physik-Buch [38]) *50*
3.2 Das Weber-Fechnersche Gesetz *51*
3.3 Radioaktiver Zerfall *52*
3.3.1 Halbwertszeit *53*
3.3.2 Mittlere Lebensdauer *53*
3.3.3 Eine Anwendung: Radioaktive Altersbestimmung *53*
3.3.4 Radiocarbon-Methode *54*
3.3.5 Uran-Blei-Alter *54*
3.3.6 Blei-Blei-Alter *54*
3.3.7 Thorium-Blei-Alter *54*
3.3.8 Kalium-Argon-Alter *55*
3.3.9 Rubidium-Strontium-Alter *55*
3.4 Temperaturausgleich (Kaffee mit Milch und Zucker) *55*
3.5 Geschwindigkeitsgleichungen chemischer Reaktionen *56*
3.6 Die barometrische Höhenformel *57*
3.7 Zinsenrechnung *57*
3.8 Zusammenhänge in der Elektrotechnik *58*
3.8.1 Elektrische Widerstände *58*
3.8.2 Ladung und Entladung von Kondensatoren *58*
3.8.3 Blitzschläge *59*
3.9 Warum tritt gerade e in der Beschreibung der Natur so häufig auf? *59*
4. Didaktische Betrachtung 62
4.1 Schulbuchvergleich: Einführung von Logarithmen *62*
4.1.1 Szirucsek-Dinauer-Unfried-Schatzl [31] *62*
4.1.2 Taschner [4] *65*
4.1.3 Bürger-Fischer-Malle-Kronfellner-Mühlgassner-Schlöglhofer [46] *67*
4.1.4 Reichel-Müller-Laub-Hanisch [6] *69*
4.1.5 Vergleich *71*
4.2 Ein neuer Vorschlag zur Einführung von Logarithmen *72*
4.3 Schulbuchvergleich: Einführung von e, Exponentialfunktion *76*
4.3.1 Reichel-Müller-Laub-Hanisch [6] *76*
4.3.2 Taschner [4] *78*
4.3.3 Szirucsek-Dinauer-Unfried-Schatzl [31] *80*
4.3.4 Bürger-Fischer-Malle-Kronfellner-Mühlgassner-Schlöglhofer [46] *82*
4.3.5 Vergleich *84*
4.4 Schulbuchvergleich: Übungsbeispiele zu e und Logarithmen *84*
4.4.1 Reichel-Müller-Laub-Hanisch [6] *85*
4.4.2 Taschner [4] *86*
4.4.3 Szirucsek-Dinauer-Unfried-Schatzl [31] *87*
4.4.4 Bürger-Fischer-Malle-Kronfellner-Mühlgassner-Schlöglhofer [46] *87*
4.4.5 Vergleich *88*
4.5 Übungsbeispiele aus Chemie zu e und Logarithmen *88*
4.5.1 Logarithmische Skala *89*
4.5.2 Dampfdruck *89*
4.5.3 Reaktionen erster Ordnung *90*
4.5.4 Die Arrhenius-Gleichung *91*
4.5.5 Der pH-Wert; andere pX-Skalen *92*
4.5.6 Freie Enthalpie *93*
4.5.7 Weitere Anwendungen im Chemie-Lehrbuch *94*

4.6 Transzendente Zahlen in der Schule *94*
4.7 Exponentielles Denken – erlernbar, erlebbar? *95*
5. Epilog 97

Anmerkungen *98*
Anhang: Die ersten 10.000 Stellen *100*
Literatur *104*

Lebenslauf *107*

3. Praktische Anwendungen

Anhand verschiedener Beispiele soll aufgezeigt werden, dass die Eulersche Zahl (durch ihr Auftreten in der Exponentialfunktion) in verschiedensten Fachgebieten ganz elementare Zusammenhänge beschreibt. Im Anschluss folgt ein Kapitel darüber, warum das so ist.

Die Anwendungen sind, wie im Folgenden gezeigt wird, sehr vielfältig. Wie weit die Auswirkungen aber tatsächlich reichen, macht folgender Ausschnitt aus einem Fachartikel bewusst (siehe [27], Seite 290):

»Es ist experimentell nachprüfbar, dass die Höhe des Bierschaums in einem Glas exponentiell mit der Zeit abnimmt. Eine Versuchsreihe lieferte das Gesetz

$h = h_0 e^{-kt}$ mit $h_0 = 6cm$ und $k = 0{,}022 s^{-1}$.«

Zahlreiche Anwendungen finden hier aus Platzgründen keine Berücksichtigung, darunter beispielsweise die logarithmischen Skalen, die Bedeutung der Exponentialfunktion für Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik und das Vorkommen bei der Berechnung von Schwingungen und Wellen.

3.1 „Exponentialgesetz“ (Einleitung in einem Physik-Buch [38])

Interessant ist in diesem Zusammenhang, wie in einem Physik-Lehrbuch für Mediziner, Biologen und Pharmazeuten [38] auf die Exponentialfunktion und ihre praktische Anwendung eingegangen wird. Es heißt hier etwa:

»Das Exponentialgesetz tritt zur Beschreibung verschiedenster physikalischer Vorgänge auf, wobei die mathematischen Größen unterschiedliche Bedeutung haben.«

Es werden dann die Beispiele namentlich genannt, die im Buch vorkommen, und zwar die zeitliche Abnahme radioaktiver Stoffe, die Dämpfung einer Schwingung, die Zeitabhängigkeit des Stromes beim Anlegen einer Spannung an einen Kondensator.

»Ebenso taucht es auf bei der Beschreibung der Zunahme der Erdbevölkerung, beim organischen Wachstum wie etwa der Zunahme der Zahl von Bakterien einer Kultur, bei der Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe oder der Sonneneinstrahlung mit zunehmender Luftverschmutzung etc.«

Die Autoren versuchen dann die Gemeinsamkeiten dieser Prozesse herauszuarbeiten, was ihnen zwar auf sehr wissenschaftlichem Niveau ausgezeichnet gelingt, die Ausführungen sind meiner Einschätzung nach allerdings nicht dem Zielpublikum (MedizinerInnen, BiologInnen und PharmazeutInnen) angepasst. Eine Kostprobe:

»Eine beliebige Messgröße y hänge so von einer Variablen x ab, dass ihre relative Änderung $\Delta y / y$ unabhängig ist vom Zahlenwert von x, aber proportional zum Intervall Δx, in welchem man die Änderung von y misst. Dies gelte auch für beliebig kleine Werte von Δx ($\Delta x \to dx$) und Δy ($\Delta y \to dy$). In der Formelsprache der Differentialrechnung heißt das:

$$\frac{dy}{y} = \pm A dx \text{ «}$$

Leider wird in diesem ansonsten ausgezeichneten Lehrbuch nicht weiter auf die Exponentialfunktion eingegangen; es findet sich nicht einmal bei allen praktischen Anwendungen im übrigen Text ein Hinweis darauf, dass es sich bei den Zusammenhängen um Exponentialfunktionen handelt!

Positiv hervorzuheben ist hingegen, dass eine oft vergessene Einschränkung für die Anwendbarkeit der Exponentialfunktion erwähnt wird:

»Es muss erwähnt werden, dass die Verwendung von dx *in unseren Beispielen [diese handelten von Bakterienkulturen, Anm.] mathematisch nicht exakt ist: In Strenge erhält man eine Exponentialfunktion [...] nur, wenn y und x kontinuierliche Variable sind. Bei unseren Anwendungsbeispielen gilt dies jedoch nicht. An die Stelle der kontinuierlichen Variablen y tritt dort eine Größe, die nur ganze Zahlen annehmen kann, nämlich die Zahl der Bakterien. Sie kann nur in ganzzahligen Schritten verändert werden. Daher kann auch* dy/y *nicht beliebig klein werden. Bei großen Zahlen von y gilt dies jedoch in recht guter Näherung [...].«*

3.2 Das Weber-Fechnersche Gesetz

Ernst Heinrich Weber[30], einer der Namensgebenden für das Weber-Fechnersche Gesetz, untersuchte 1825 in einer Reihe von Experimenten die menschliche Reaktion auf verschiedene physikalische Reize. Er stellte dabei fest, dass die Empfindung nicht von der absoluten, sondern von der relativen Änderung des Reizes abhängig ist. Kann man etwa beim Halten von Gewichten einen Zuwachs um 1kg von 10kg auf 11kg gerade noch wahrnehmen, so liegt diese Wahrnehmungsschwelle bei 10% Zuwachs. Hält man bereits 20kg, so ist der neuerliche Zuwachs von 1kg nicht mehr bemerkbar, wohl aber der Zuwachs um 2kg = 10%.

Mathematisch ausgedrückt gilt:

$$ds = k \cdot \left(\frac{dW}{W} \right)$$

wobei ds den kleinsten noch merkbare Zuwachs bedeutet, dW den absoluten Zuwachs, W den bereits vorhandenen Reiz und k einen Proportionalitätsfaktor bezeichnet.

Nach Verallgemeinerung seines Gesetzes auf alle Arten physiologischer Reize, wie etwa Schmerzempfindung, Helligkeit, Lautstärke, griff Gustav Theodor Fechner[31] den Sachverhalt auf und machte ihn als Weber-Fechnersches Gesetz populär.

Mathematisch betrachtet, handelt es sich natürlich um eine Differentialgleichung, und Integration ergibt

$$s = k \cdot \ln W + C\,.$$

Mit Hilfe des niedrigsten wahrnehmbaren Reizes W_0 erhält man unter Ausschaltung der Integrationskonstante C schließlich:

$$s = k \ln\left(\frac{W}{W_0} \right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{W}{W_0} = K \cdot e^s$$

Möchte man also bei einem höheren Reiz eine Intensitätsänderung vornehmen, die ebenso stark empfunden wird, so genügt nicht eine Änderung derselben Größe, sondern diese muss *in konstantem Verhältnis* zur vorherigen Änderung stehen.

3.3 Radioaktiver Zerfall

Der radioaktive Zerfall ist, wie dieser Abschnitt zeigen soll, ein sehr dankbares Beispiel für eine Anwendung der Exponentialfunktion. Deshalb wird hier ausführlich darauf eingegangen (Literatur für diesen Abschnitt: [37]).

Die Anzahl dN der in einem Zeitintervall dt zerfallenden Kerne ist der Gesamtzahl N der zerfallsfähigen Kerne proportional:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N \equiv A \quad \text{(Grundgesetz des radioaktiven Zerfalls)}$$

Daraus erhält man durch Integration:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad \text{(Zerfallsgesetz für ein Radionuklid)}$$

N ist die nach der Zeit t noch vorhandene Anzahl zerfallsfähiger Kerne, wenn zur Zeit $t = 0$ N_0 solcher Kerne im Präparat vorhanden waren.

Der Wert λ heißt Zerfallskonstante. Die Zerfallskonstante hängt nur von der Art des Nuklids ab, hingegen aber nicht von Druck, Temperatur, elektrischen oder magnetischen Feldern, Ort oder ähnlichem.

Als Maß für die Radioaktivität A (kurz: Aktivität) wird die Zahl der pro Zeiteinheit eintretenden Kernzerfälle angegeben:

$1Ci = 3{,}7 \cdot 10^{10}\, Zerfälle / Sekunde$ (Ci ... Curie)

Die SI-Einheit[32] für die Aktivität ist 1 Becquerel ($1Bq$):

$1Bq = 1 Zerfall / Sekunde$

$1Bq = 27\, pCi$

$1Ci = 3{,}7 \cdot 10^{10}\, Bq = 37 GBq$

Wie wir bereits gesehen haben, gilt für die Aktivität A: $A = -\frac{dN}{dt} = \lambda N$

Wegen der Proportionalität von Atomzahl und Aktivität gilt dann auch:

$$A = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Die oben genannten Einheiten der Aktivität (Becquerel bzw. Curie) haben nichts mit der vorhandenen Stoffmenge zu tun! Vielmehr beschreiben sie, unabhängig von der Menge des Stoffes, das Ausmaß der Zerfälle und damit auch der entstehenden Strahlung.

Die spezifische Aktivität ist die Aktivität eines Stoffes pro Masseneinheit bzw. pro Mol:

$$\boldsymbol{s} = \frac{A}{m} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{s} = \frac{A}{MG}$$

Gängige Einheiten sind: mCi/g, Ci/g, Bq/kg, Bq/mol.

3.3.1 Halbwertszeit

Setzt man $N = \frac{N_0}{2}$ in das Zerfallsgesetz ein, so erhält man die Halbwertszeit $\boldsymbol{t}$ (manchmal auch $t_{1/2}$), also jene Zeit, in der die Hälfte einer vorliegenden Zahl radioaktiver Atomkerne zerfallen ist:

$$\boldsymbol{t} = \frac{\ln 2}{\boldsymbol{l}}$$

Das Zerfallsgesetz kann auch mit $\boldsymbol{t}$ als Konstante angeschrieben werden:

$$A = A_0 \cdot e^{-\left(\frac{\ln 2}{t}\right) \cdot t} = A_0 \cdot 2^{-\frac{t}{t}}$$

3.3.2 Mittlere Lebensdauer

Die Mittlere Lebensdauer $\boldsymbol{t}_m = \frac{1}{\boldsymbol{l}}$ gibt an, in welcher Zeit die Aktivität auf den Bruchteil $\frac{1}{e}$ fällt:

$$\frac{A}{A_0} = e^{-l t_m} = e^{-1} = 0{,}3679...$$

3.3.3 Eine Anwendung: Radioaktive Altersbestimmung

Mit Hilfe von radioaktiven Nukliden[33] können Altersbestimmungen von Mineralien (Geochronologie) und archäologischen Funden durchgeführt werden, weil die radioaktiven Kerne unabhängig von allen äußeren Einflüssen in gesetzmäßiger Weise zerfallen. Wenn ein Gegenstand zur Zeit seiner Entstehung N_0 Kerne eines bestimmten Radionuklides enthält, so sind hiervon zur Zeit *t* noch $N(t) = N_0 \cdot e^{-lt}$ Kerne vorhanden.

N_0 kann experimentell nicht mehr ermittelt werden, wohl aber $N(t)$ und ΔN, die Anzahl der durch Zerfall im Zeitraum *t* entstandenen Tochterkerne. Es gilt:

$$\Delta N = N_0 - N(t) = N(t) \cdot \left(e^{lt} - 1\right)$$

Daraus kann die seit der Entstehung des Gegenstandes vergangene Zeit ermittelt werden:

$$t = \frac{1}{\boldsymbol{l}} \cdot \ln \frac{\Delta N + N(t)}{N(t)}$$

3.3.4 Radiocarbon-Methode

Der bekannteste solche Weg der Altersbestimmung ist jener mittels Radiocarbon-Methode. Verwendet wird dabei das radioaktive Kohlenstoff-Nuklid ${}^{14}_{6}C$, das in der Atmosphäre durch die kosmische Strahlung aus dem Stickstoff der Luft nach der Gleichung ${}^{14}_{7}N + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{14}_{6}C + {}^{1}_{1}p$ – in Fachkreisen angeschrieben als ${}^{14}_{7}N(n,p){}^{14}_{6}C$ – gebildet wird. Im Lauf der Jahrmillionen hat sich ein Gleichgewicht zwischen Zerfall und Neubildung des ${}^{14}_{6}C$ gebildet. ${}^{14}_{6}C$ liegt als ${}^{14}CO_2$ vor, wird von den Pflanzen assimiliert und gelangt über die Pflanzen in die Körper der Tiere und Menschen. Solange die Organismen leben, besteht ein Gleichgewichtszustand mit der Umgebung; stirbt das Lebewesen, wird kein weiterer Kohlenstoff mehr aufgenommen, und die spezifische Aktivität des in ihm enthaltenen ${}^{14}C$ nimmt nach dem radioaktiven Zerfallsgesetz mit der diesem Nuklid eigenen Halbwertszeit von 5730 Jahren ab.

Nach dieser Methode werden Altersbestimmungen an Holz- und Knochenresten sowie an anderen archäologischen Funden durchgeführt, deren Alter zwischen 1000 und 50000 Jahren liegt. Man misst das Verhältnis der spezifischen â-Aktivität des Probenkohlenstoffs zu derjenigen von „frischem“ Kohlenstoff, z.B. frisches Holz, und errechnet daraus das Alter der Probe. Wegen der weichen â-Strahlung des ${}^{14}_{6}C$ ergeben sich messtechnische Schwierigkeiten.

Neben dieser Methode, die in praktisch alle Schulbücher in Form von Übungsbeispielen Eingang gefunden hat, sind auch weitere, weniger geläufige Methoden in Verwendung, von denen die wichtigsten hier genannt werden sollen.

3.3.5 Uran-Blei-Alter

Hierbei werden zwei verschiedene Zerfallsprozesse von Uran in Blei betrachtet, nämlich jener von ${}^{238}_{92}U$ in ${}^{206}_{82}Pb$ und jener von ${}^{235}_{92}U$ in ${}^{207}_{82}Pb$. Werden die beiden Altersbestimmungen voneinander unabhängig durchgeführt, so steigert das die Zuverlässigkeit der Ergebnisse.

3.3.6 Blei-Blei-Alter

Auf demselben Zerfallsprozess aufbauend wie das Uran-Blei-Alter, wird das Verfahren hier vereinfacht, indem man sich auf das Verhältnis der radiogen gebildeten Blei-Nuklide ${}^{206}_{82}Pb$ und ${}^{207}_{82}Pb$ stützt. Somit genügt es, das Verhältnis der beiden Nuklide massenspektrometrisch zu bestimmen, um das Alter einer Gesteinsprobe errechnen zu können.

3.3.7 Thorium-Blei-Alter

In Mineralien, die neben Uran auch Thorium enthalten, kann man sich den Zerfall von ${}^{232}Th$ in ${}^{208}Pb$ zur Altersbestimmung zu Nutze machen.

3.3.8 Kalium-Argon-Alter

Hier ist die Bestimmung des Gehalts an ${}^{40}_{19}K$ und an radiogen entstandenem ${}^{40}_{18}Ar$ erforderlich. Da der Nuklidgehalt an ${}^{40}_{19}K$ in Gesteinen und Mineralien innerhalb sehr enger Grenzen (weniger als 0,5%) konstant ist, kann die ${}^{40}_{19}K$-Konzentration der Probe auch aus deren Kaliumgehalt ermittelt werden, der sich mit dem Flammenphotometer bis auf weniger als 1% genau bestimmen lässt. Im Falle sehr kleiner Kalium-Gehalte werden massenspektrometrische Bestimmungen durchgeführt.

Zur Bestimmung des ${}^{40}_{18}Ar$-Gehaltes schmilzt man die Probe im Vakuum, bindet alle nichtedlen Gase, die mit dem Argon aus der Schmelze entweichen, chemisch ab, und untersucht das Restgas massenspektrometrisch.

3.3.9 Rubidium-Strontium-Alter

Zur Datierung Rubidium-haltiger Minerale sehr geeignet, ähnelt diese Methode stark der Kalium-Argon-Methode, mit dem Unterschied, dass das Zerfallsprodukt in diesem Falle fest und nicht gasförmig vorliegt.

3.4 Temperaturausgleich (Kaffee mit Milch und Zucker)

Bringt man einen Gegenstand einer bestimmten Temperatur in eine (kühlere) Umgebung, deren Temperatur ihrerseits als konstant angenommen wird, so kühlt sich der Gegenstand mit einer bestimmten Geschwindigkeit ab.

Nach Newton ist die Abkühlgeschwindigkeit $-\frac{dT}{t}$ proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Körper und Umgebung, also $k(T-T_0)$. Durch Integration erhält man die Momentantemperatur des Körpers:

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\cdot e^{-kt}$$

Hierbei ist T_1 die Temperatur des Körpers zum Zeitpunkt $t=0$.

Man erkennt, dass der Körper laut der oben angeschriebenen Lösung die Temperatur der Umgebung niemals erreicht.

Man stelle sich in diesem Zusammenhang die Frage, ob es klüger ist, warmen Kaffee sofort nach dem Einschenken oder erst nach einer Abkühlphase mit kalter Milch zu mischen, um schnell zur gewünschten Zieltemperatur zu gelangen. Für den Fall, dass die Mischungstemperatur gleich der Umgebungstemperatur sein soll, ist es jedenfalls gleichgültig, wann man die Milch in den Kaffee schüttet (siehe [26], Seite 260).

3.5 Geschwindigkeitsgleichungen chemischer Reaktionen

Versucht man, den Zusammenhang zwischen der Temperatur *T* und der Geschwindigkeit einer chemischen Reaktion, ausgedrückt durch die Geschwindigkeitskonstante *k*, experimentell zu ermitteln, so erhält man für die überwiegende Zahl der chemischen Reaktionen den folgenden Zusammenhang:

$$\lg K = \lg A' - \frac{B}{T}$$

beziehungsweise, nach Übergang zu natürlichen Logarithmen und einer kleinen Umformung, die bereits Arrhenius bekannte Formel

$$k = A \cdot e^{-\frac{E}{RT}}$$

Hierbei sind *A*, *A´*, *E* und *R* Konstanten. *A* kann über die Stoßgesetze hergeleitet werden.

Das Massenwirkungsgesetz[34] liefert bei unimolekularen Reaktionen für den Fall, dass ein Reaktand in unbegrenzter Menge zur Verfügung steht (gleichbedeutend damit, dass die Reaktionsgeschwindigkeit proportional zur vorhandenen sich umwandelnden Menge des zweiten beteiligten Stoffes ist), den Zusammenhang

$$u(t) = a \cdot e^{-kt}$$

$u(t)$ bezeichnet die zur Zeit *t* noch nicht umgewandelte Stoffmenge. *a* stellt die zur Zeit $t = 0$ vorhandene Stoffmenge dar.

Die Menge des Reaktionsproduktes einer Reaktion mit zwei Ausgangsstoffen der Konzentrationen *a*, *b* ($a < b$) kann mathematisch erfasst werden:

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x)$$

Durch Umstellen und Integration mittels Partialbruchzerlegung ergibt sich:

$$x = \frac{ab\left(1 - e^{(a-b)kt}\right)}{b - ae^{(a-b)kt}}$$

Ein Beispiel für eine Reaktion, die diesem mathematischen Schema folgt, stellt etwa die Verseifung dar (aus Ethylacetat und Natronlauge entsteht Ethanol).

K_1 ... Konzentration des Ethylacetats

K_2 ... Konzentration der Natronlauge

Die Konzentration *X* des Ethanols nimmt dann nach folgendem Gesetz zu:

$$X = K_1\left(1 - e^{-cK_2 t}\right)$$

Die Formel gilt für monomolekulare Reaktionen stets; im beschriebenen Fall muss genügend Wasser zur Verfügung stehen (siehe [27], Seite 289).

3.6 Die barometrische Höhenformel

Die Messung der Flughöhe erfolgte in Flugzeugen früher unter Verwendung des Luftdruckes mittels der barometrischen Höhenformel. Hintergrund der Berechnung ist, dass der Luftdruck mit zunehmender Höhe exponentiell abnimmt. Bei 5500m Seehöhe beträgt er nur noch 50% des Wertes auf Meeresniveau (dort beträgt der Luftdruck bekanntlich 1013mbar bzw. Hectopascal).

In der wissenschaftlich korrekten Form lautet die barometrische Höhenformel:

$$h = 18400 \cdot (1 + gt) \cdot \lg \frac{p_1}{p_2}$$

Dabei bedeutet $g = 0{,}00367/°C$ den Ausdehnungskoeffizienten der Luft. Nun kann man Luftdruck p_1 in der Höhe h_1 und p_2 in der Höhe h_2 einsetzen (Einheit: N/m^2), und unter Kenntnis der Mitteltemperatur *t* der dazwischen liegenden Luftschicht ergibt sich die Höhendifferenz *h* zwischen den beiden Messpunkten.

3.7 Zinsenrechnung

Das Beispiel der Zinsenrechnung ist zwar so wichtig, dass es hier Erwähnung finden muss, allerdings gleichzeitig so omnipräsent in allen Schul- und Fachbüchern, dass hier mit den wesentlichsten Fakten und einem Verweis auf die Literatur das Auslangen gefunden werden kann.

Betrachtet man die Verzinsung eines bestimmten Kapitals, so ist nicht nur der Zinssatz relevant, sondern auch das Intervall der Verzinsung, ab dem die Zinsen zum Kapital gerechnet werden und somit auch selbst wieder Zinsen hervorrufen.

Anschaulich klar ist, dass der Zuwachs des Kapitals umso größer ist, je kleiner dieses Intervall ist – denn umso früher kommen die Zinsen ja zum Kapitalstock und werfen auch selbst Zinsen ab. Interessant und nicht mehr unmittelbar per Anschauung zugänglich ist allerdings, dass eine „unendliche“ Verkürzung dieses Intervalls hin zur Momentanverzinsung das Kapital **nicht** unendlich anwachsen lässt.

Die Funktion, die diesen Prozess beschreibt, heißt Zinseszinsformel und sieht aus wie folgt:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Wie schon erwähnt, bietet so gut wie jedes Lehrbuch nähere Details.

3.8 Zusammenhänge in der Elektrotechnik

3.8.1 Elektrische Widerstände

Temperaturabhängige Halbleiter-Widerstände, sogenannte *Thermistoren*, ändern ihren Widerstand, wie der Name vermuten lässt, mit der Temperatur, und zwar exponentiell:

$$R = a \cdot e^{\frac{b}{T}}$$

Dabei stellt a einen Widerstands-Wert dar, der von der Art des verwendeten Widerstandes abhängt, und b bedeutet den Temperaturkoeffizienten. Der Wert von b kann ermittelt werden, indem man die Widerstände bei zwei verschiedenen Temperaturen misst (siehe [26], Seite 261).

3.8.2 Ladung und Entladung von Kondensatoren

Bei der Berechnung von Ladung und Entladung von Kondensatoren tritt ebenfalls die Eulersche Zahl auf. Die Formel für die Kondensatorspannung lautet wie folgt:

$$U_c = U_b \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right)$$

Der Kondensatorstrom, der hierbei fließt, wird berechnet mittels folgender Formel:

$$I_c = \frac{U_b}{R} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Der Zusammenhang ist klar, da ja das Ohmsche Gesetz gilt: $U = R \cdot I$.

Die Variablen [Einheiten] sind hierbei:

U Spannung [Volt], die an den Kondensator angelegt wird

U_b Betriebsspannung

U_c Spannung nach der Zeit t

I Strom [Ampere], der durch den Kondensator fließt

I_c Strom nach der Zeit t

t Zeit [Sekunden]

R Serieller Lade-Widerstand [Ohm]

C Kapazität des Kondensators [Farad]

3.8.3 Blitzschläge

Auch im Blitzschutz tritt die Eulersche Zahl mehrmals auf, wie ein Blick in ein Handbuch für Blitzschutz [49] beweist. So wird zur Berechnung üblicherweise von einem Blitzstrom ausgegangen, der gemäß einer Exponentialfunktion ansteigt und abklingt nach folgender Formel:

$$I = I_0 \cdot \left(e^{-\frac{t}{t_1}} - e^{-\frac{t}{t_2}} \right)$$

Wobei die Variablen folgende Bedeutung haben:

I_0 Strombezugswert [Ampere]

t_1 Rückenzeitkonstante des Blitzstromes [Sekunden]

t_2 Stirnzeitkonstante des Blitzstromes [Sekunden]

Laut Handbuch für Blitzschutz kann für die hinsichtlich der größten Feldänderungen wichtigen Folgeblitze ein normierter Stoßstrom (Stirnzeit $T_1 = 1ms$ entsprechend $t_2 = 0{,}405ms$, Rückenhalbwertzeit $T_2 = 50ms$ entsprechend $t_2 = 68{,}5ms$)

$$i = \frac{\hat{i}}{0{,}96} \cdot \left(e^{-\frac{t}{68{,}5}} - e^{-\frac{t}{0{,}405}} \right) \text{[in Ampere]}$$

mit einer Vertikalgeschwindigkeit v um $100 \cdot 10^6\, m/s$ angenommen werden. Dabei bedeutet $\hat{i}$ den Maximalwert des Blitzstromes in Ampere und t die Zeit in ms. Für nähere Details sei auf die Fachliteratur verwiesen.

3.9 Warum tritt gerade e in der Beschreibung der Natur so häufig auf?

Ist es denn so, dass e in der Beschreibung der Natur besonders häufig auftritt? Als besonders krasses Exempel soll eine Kurzmeldung aus *„Spektrum der Wissenschaft“* dienen (siehe [17]):

»Einer etwa 9000 Jahre alten Flöte haben Wissenschaftler noch Töne entlocken können – damit ist sie womöglich das älteste noch funktionsfähige Musikinstrument der Welt. Wie die Forscher berichten, entsprachen die einzelnen Töne dabei verblüffend genau unserer Tonleiter. [...] Mit Hilfe der Radiokarbonmethode ermittelten amerikanische Forscher das hohe Alter des Musikinstruments.«

In einem wissenschaftlichen Artikel, der ganze 13 Zeilen umfasst, tritt die Eulersche Zahl gleich zweimal verborgen auf: einerseits bei den Tonhöhen und andererseits bei der Altersbestimmung durch die Radiokarbonmethode. Wenn das nicht überzeugend ist?!

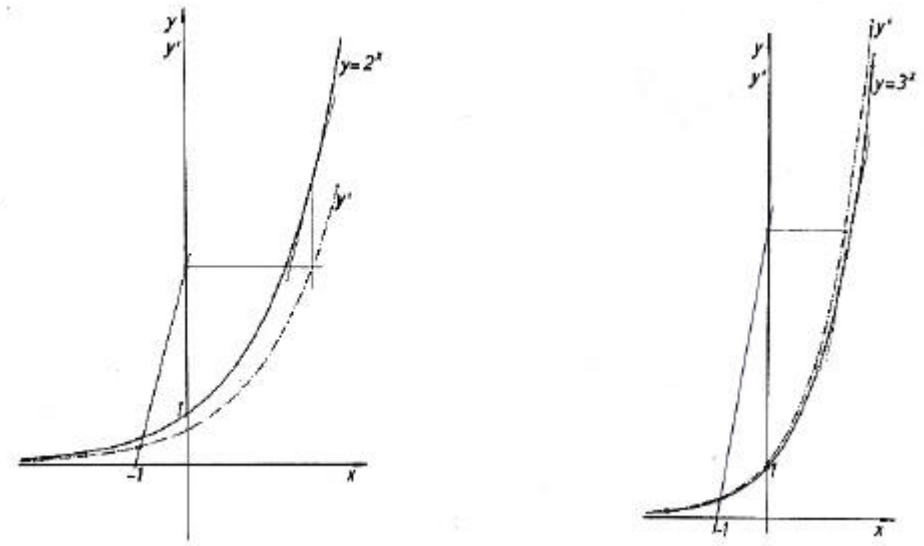
Leider ist in der Literatur nur sehr selten verständlich dargelegt, warum es gerade die *e*-Funktion ist, die dermaßen häufig in Beschreibungen der Natur auftritt. Selbst in Fachzeitschriften heißt es dann beispielsweise[35], *„Auf diese Weise lernen die Schüler, dass die Basis e nicht etwa willkürlich gewählt wurde. Die Basis e ist eine Konstante, die die*

Grundlage des Gesetzes über natürliches Wachstum darstellt: $y = c \cdot e^{a \cdot x}$.“ Dabei handelt es sich allerdings eher um eine Beschreibung des Ist-Zustandes denn um eine Erklärung.

Tatsächlich sind es zwei Fakten, die ineinandergreifen und so die Überlegenheit und Omnipräsenz der Exponentialfunktion begründen.

Einerseits zeichnet sich die *e*-Funktion dadurch aus, dass sie ihrer Ableitung aufs Haar gleicht. Diese Eigenschaft erleichtert ihre Handhabbarkeit sehr. Einen Weg, diese Eigenschaft anschaulich zu machen, bietet [18]:

Es werden (etwa im Unterricht oder als Hausaufgabe) die Funktionen 2^x und 3^x grafisch dargestellt. Durch zeichnerische Differentiation werden für etwa zehn Kurvenpunkte die zugehörigen Punkte der ersten Ableitung gefunden. Im Fall von 2^x liegt die Ableitung unterhalb der Kurve, im Fall von 3^x aber oberhalb. Die Vermutung liegt nahe, dass es eine Exponentfunktion geben könnte, bei der die Ableitung mit der Stammfunktion ident ist. In dem Falle wäre *a* wohl zwischen 2 und 3 sowie wahrscheinlich dichter bei 3.



Graphische Differentiation von 2^x und 3^x

Der Ansatz $y = a^x$, $f'(x) = f(x)$ liefert: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x$,

woraus sich mit $\Delta x = \dfrac{1}{n}$ nach kurzer Umformung $a = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ ergibt.

Diese Eigenschaft geht Hand in Hand mit einer zweiten Besonderheit, nämlich der Möglichkeit, jede beliebige allgemeine Exponentialfunktion auszudrücken als eine natürliche Exponentialfunktion mit einer multiplikativen Konstante.

Damit ist uns der Schlüssel in die Hand gegeben, alle Prozesse, die exponentiell verlaufen – und derer gibt es viele, wie wir bereits gesehen haben! –, mittels der natürlichen Exponentialfunktion zu beschreiben. Die Antwort auf die Frage, warum die Exponentialfunktion so oft auftritt, ist also vielschichtig zu sehen:

In einer ersten Stufe kann man beobachten, dass viele Prozesse in der Natur aus anschaulichen Gründen einer allgemeinen Exponentialfunktion folgen, ganz einfach weil ihr Wachstums- oder Zerfalls-Verhalten abhängig ist von der derzeit vorhandenen „Menge“ (z.B. an radioaktiver Substanz, an Bakterien, an Kapital, ...).

Zweitens können wir alle Exponentialfunktionen anschreiben als natürliche Exponentialfunktionen, wie im Verlauf dieser Arbeit mehrfach gezeigt wurde.

Und schließlich liegt aus Gründen der Handhabbarkeit und der Vergleichbarkeit einzelner Prozesse untereinander ein Interesse daran vor, auch tatsächlich zu *tun*, was in Punkt Zwei als Möglichkeit angeführt ist, sprich: die Beschreibungen von Wachstums- oder Zerfallsprozessen als *e*-Funktionen auszudrücken.

Damit wird anschaulich klar, was die wirklichen Hintergründe des häufigen Auftretens der Exponentialfunktion sind.