Matrizenrechnung

Anwendungen

Eine Ergänzung zu

Algebra Kapitel 5: Lineare Gleichungssysteme

Eine Klassenarbeit

Blockunterricht für zwei Tage

Gymnasiale Mittelstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

1. Juli 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Überblick **1**
1.1 (Provisorischer) Zeitplan 2
1.2 Gruppeneinteilung 3

2 *Eure* Repetition **4**

3 Das digitale Hilfsmittel - *Eure* Bemerkungen **5**
3.1 Die zugehörigen Aufgaben 6

4 Mehrstufige Prozesse **7**
4.1 Materialverflechtung 8
4.2 Populationsentwicklungen, Entwicklungsprozesse 11

5 Die Drehmatrizen **14**

1 Überblick

- Wir beginnen mit einer *Repetion der Grundbegriffe zur Matrizenrechnung* und insbesondere dem Zusammenhang zwischen einem linearen Gleichungssystem und einer Matrizengleichung.
  Was wir alles schon gemeinsam eingeführt und besprochen haben, in
  ALGEBRA - Kapitel 5: Lineare Gleichungssysteme, Kap. 5.8

  Selbständiges Arbeiten

- Wir werden bei den anstehenden Anwendungen für die notwendigen Berechnungen auf digitale Hilfsmittel zurückgreifen. In unserem Fall sind das

  - der TR *TI-Nspire*
  - die Gratisapp Matrix Calculator

  Selbständiges Erarbeiten der notwendigen Kenntnisse und Anwenden in einer vorgegeben Aufgabenserie

- Die Anwendungen, welche wir diskutieren werden, sind

  - Mehrstufige Prozesse im Zusammenhang mit Populationen,
  - Mehrstufuge Prozesse im Zusammenhang mit Produtionsprozessen,
  - Die Drehmatrizen.

  Es wird zu jedem Thema ein Beispiel mit der Klasse gemeinsam erarbeitet. Anschliessend werden in Gruppen weitere, vorgegebene Beispiele selbständig gelöst.
  Die Gruppe hat eines dieser Beispiel für eine Präsentation vor der Klasse und eine weitere Aufgabe für die Klasse vorzubereiten. Die Klasse wird während des Lösungsprozesses kompetent von den Gruppenmitgliedern begleitet.

1.1 (Provisorischer) Zeitplan

Während der Sonderwoche '24 an der *KSL:*

- *Repetition:*
  Aus aktuellem Anlass nicht notwendig.

- *Digitale Hilfsmittel:*
  Montag, 1. Juli, 09:00 - 11:00

- *Gemeinsames Erarbeiten der Themen:*
  Montag, 1. Juli, 11:00 - 13:30 (inkl. Mittagspause)

- *Gruppenarbeit:*
  Lösen, Präsentation erstellen, weitere Aufgabe vorbereiten
  Montag, 1. Juli, ab 13:30 ... bis Montag, 8. Juli, 13:00

- *Arbeiten im Plenum:*
  Die Gruppen präsentieren ihre Beispiele und begleiten die Klasse beim Lösen ihrer Aufgaben.
  Montag, 8 Juli, ab 13:00 ... bis fertig.

- *Ort:* A408

1.2 Gruppeneinteilung

Gearbeitet wird in Gruppen, mit 3 bis max 4 SchülerInnen,
unterteilt wird in Themen und Hilfsmittel (TR oder Laptop/Tablet)

Die Gruppen:

-
    -
    -
    -
    -
-
    -
    -
    -
    -
-
    -
    -
    -
    -
-
    -
    -
    -
    -
-
    -
    -
    -
    -
-
    -
    -
    -
    -

2 *Eure* Repetition

3 Das digitale Hilfsmittel - *Eure* Bemerkungen

Mögliche Quellen

für den TI-Nspire:

- https://www.youtube.com/watch?v=QXOZkDCybNc
- ~~https://www.manualslib.de/manual/8487/Texas-Instruments-Ti-Nspire-Cas.html?page=49~~

für die Gratissoftware:

- https://matrixcalc.org/
  Ein kleiner Hinweis:
  Für das Erstellen einer z.B. 3×5 - Matrix:
  Verwende als Vorlage eine 5×5 - Matrix und lasse die überzähligen Zeilen leer.

3.1 Die zugehörigen Aufgaben

1. Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} , \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$D \cdot F^T C \cdot A^T \cdot B \cdot B$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} , \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$B \cdot A \cdot C^2 \cdot F \cdot D^T$

   (a) Berechne: $A + B,\ B + A,\ \mathbb{I}_3 - C,\ AB,\ BA,\ C^2,\ D^5,\ A^T CB,\ DF^T$

   (b) Formuliere ein Produkt, in welchem *alle* obigen Matrizen mindestens einmal vorkommen und *mindestens eine* davon doppelt vorkommt.

$B^2 \ldots\ldots D^T$

   (c) Welche der den obigen Matrizen zugehörigen Gleichungssysteme haben genau eine Lösung ? B, C

a_{ij}

$a_{1,2}$

2. Konstruiere $A \in M(5 \times 6, \mathbb{R})$, mit $a_{ij} := \begin{cases} 1 & , \quad \forall i = j \\ 2 & , \quad \forall j = i+1 \\ 3 & , \quad \forall j = i-1 \\ 4 & , \quad \forall j = i+2 \\ 5 & , \quad \forall j = i-2 \\ 6 & , \quad sonst \end{cases}$

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array} \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 6 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

reduzierte Diagonal...

   (a) Berechne $A^T \cdot A$ und $A \cdot A^T$.

   (b) Bringe A auf *Dreiecksform.*

$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

3. Löse das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe einer Matrizengleichung:

$$\begin{aligned} x + y - z + 2v - w &= 0 \\ 2y + 3x - v - w - z &= 2 \\ x - y + v - w + z &= -4 \\ 2v - 3x + z &= -5 \\ w + z - x + v &= 0 \end{aligned}$$

Koeff. m

augmentiert Matrix

4 Mehrstufige Prozesse

Mehrstufige Prozesse sind dadurch gekennzeichnet, dass eine durch einen *Zustandsvektor* beschriebene Startsituation Schritt für Schritt mit Hilfe von *Übergangsmatrizen* in Folgesituationen überführt wird.
Dabei kann diese Überführung durch von Stufe zu Stufe verschiedene Matrizen (z.B. Materialverflechtungen) oder durch das mehrfache Anwenden ein und derselben Matrix erfolgen (z.B. Populationsentwicklungen, Entwicklungsprozesse).

Als Quelle verwenden wir die Unterlagen von

J. Bemetz: *Materialen zu Mehrstufigen Prozesse*,
Martin-Heidegger-Gymnasium Meβkirch

oder

http://www.dieter-heidorn.de/ ...

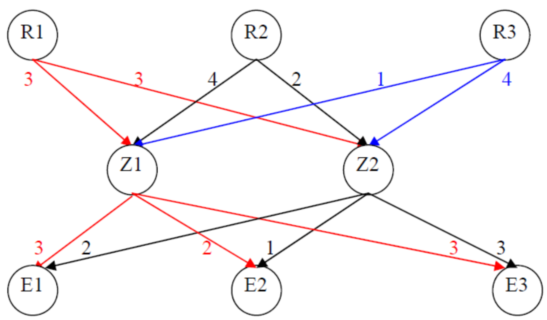
oder

Matrizen und Vektoren als Datenspeicher - ein Lernheft

Wir werden uns an den folgenden drei Beispielen mit der Thematik vertraut machen ...

4.1 Materialverflechtung

In einem Produktionsprozess werden zur Herstellung von 2 Zwischenprodukten Z1 und Z2 drei verschiedene Rohstoffe R1, R2, und R3 benötigt. Aus den beiden Zwischenprodukten entstehen dann 3 verschiedene Endprodukte E1, E2 und E3.
Der untenstehenden Figur kann entnommen werden, wieviel Mengeneinheiten der Rohstoffe für die jeweiligen Zwischenprodukte und wieviel Mengeneinheiten der Zwischenprodukte für die jeweiligen Endprodukte benötigt werden.
Gesucht ist der Rohstoffbedarf für die verschiedenen Endprodukte.

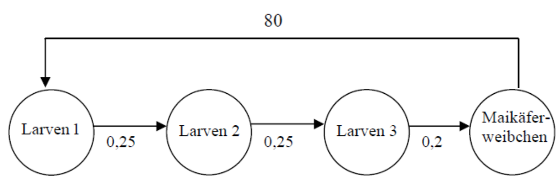


Diskussion der Lösung:

Alternativer Zugang:

4.2 Populationsentwicklungen, Entwicklungsprozesse

Eine Maikäferpopulation:
Ein Maikäferweibchen legt 80 Eier und stirbt bald danach. Von den sich daraus entwickelnden Larven (Engerlinge) überleben nur ein Viertel das darauffolgende Jahr. Auch im zweiten Jahr überleben nur ein Viertel der Larven. Im dritten Jahre verpuppen sich die Larven und aus einem Fünftel von ihnen entwickeln sich im folgenden Jahr Maikäferweibchen, die wieder 80 Eier legen.

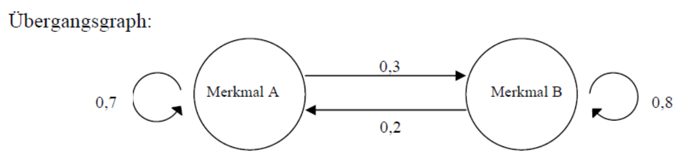


Wir wollen nun die Entwicklung einer Startpopulation aus 6000 Larven 1, 2000 Larven 2, 300 Larven 3 und 500 Käfernweibchen untersuchen.

Diskussion der Lösung:

Die Vererbung von Merkmalen:

Eine Population von Insekten enthält Tiere mit zwei verschiedenen Merkmalen A und B (z.B. Farbe). Beobachtungen über längere Zeit zeigen, dass Insekten mit Merkmal A zu 70% Nachkommen mit Merkmal A und zu 30% solche mit Merkmal B haben. Insekten mit Merkmal B haben zu 80% wieder Nachkommen mit diesem Merkmal, zu 20% solche mit Merkmal A. Die Vermehrungsrate wird durch die Merkmale nicht beeinflusst.



$x_A(0)$ *sei der Anteil der Insekten mit Merkmal A zu Beobachtungsbeginn,* $x_B(0)$ *entsprechend derjenige mit Merkmal B.*

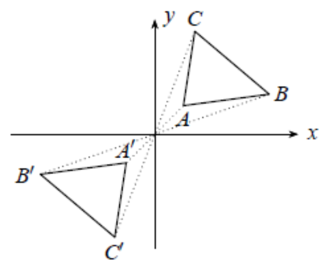
5 Die Drehmatrizen

Matrizen können auch für (lineare) geometrische Abbildungen verwendet werden.

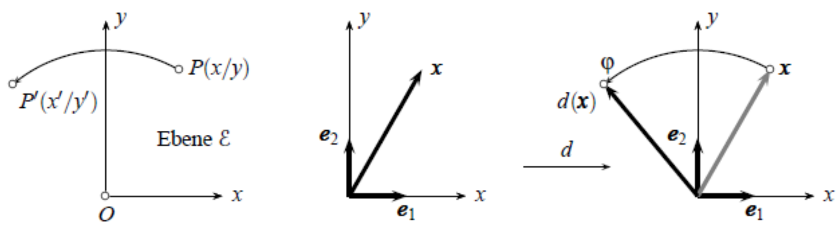
- z.B. für die *Spiegelung am Ursprung*:

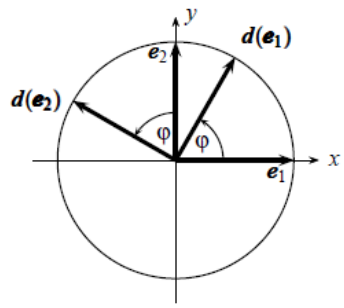
Die Spiegelung von Punkten am 0-Punkt in der Ebene wird durch folgende lineare Abbildungen beschrieben:

$$s:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{y} = s(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}.$$



- oder z.B. für *Drehungen um den Ursprung*:





Die Drehmatrizen im $\mathbb{R}^2$ haben ein wichtige mathematische Eigenschaft:

Die Menge aller Drehmatrizen bilden bzgl der Multiplikation eine *Gruppe*.

Der Begriff der *Gruppe* ist zu recherchieren und die Gruppeneigenschaft der Menge aller Drehmatrizen in der Ebene zu verifizieren (Die Assoziativität der Matrizenmultiplikation muss nicht bewiesen werden, sie kann als gegeben angenommen werden).
Für die Verifikation werden noch die *Additionstheoreme* verwendet, welche nachgeschlagen aber nicht bewiesen werden müssen. In diesem Zusammenhang muss jedoch bewiesen werden, dass die trigonometrischen Funktionen nicht linear sind.

Alles weitere dazu und Anwendungen unter

R. Manz, Lineare Algebra, zhaw ein Auszug.