Lineare Gleichungssysteme

(FHMS - Version)

Kapitel 5

aus meinem Lehrgang *ALGEBRA*

Ronald Balestra
CH - 7028 St. Peter
www.ronaldbalestra.ch
e-mail: theorie@ronaldbalestra.ch

19. Oktober 2009

Überblick über die bisherigen *ALGEBRA* - Themen:

Inhaltsverzeichnis

5 Lineare Gleichungssysteme

5.1 Überblick

Wir beginnen mit der Repetition der Lösungsmethoden von linearen 2×2 Gleichungssystemen und werden mit Hilfe der geometrischen Interpretation deren *Lösbarkeitsbedingungen* diskutieren. Neu werden wir das *Gauß'sche Eliminationsverfahren* kennenlernen, welches vor allem bei *lineare* $n \times m$ *Gleichungssytemen*, mit $n, m \geq 3$ zur Anwendung kommt.
Die Einführung von *Parametern* in die Gleichungssyteme ermöglicht uns einmal mehr eine Diskussion der Lösbarkeitsbedingungen.
Wir schliessen dieses Kapitel mit einigen Beispielen zu *Textaufgaben*.

Begleitend wird die Aufgabensammlung von

Deller/Gebauer/Zinn: *Algebra 1*, Verlag OrellFüssli

verwendet.

5.2 Lineare 2×2 Gleichungssysteme

Was ist ein lineares 2×2 Gleichungssystem ?

Wir wollen an den folgenden Beispielen unsere Lösungsmethoden repetieren:

Beispiel 5.2.1

1. $$\begin{aligned} -2x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= -5 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 2 - y &= 3x \\ 3y + 9x &= -6 \end{aligned}$$

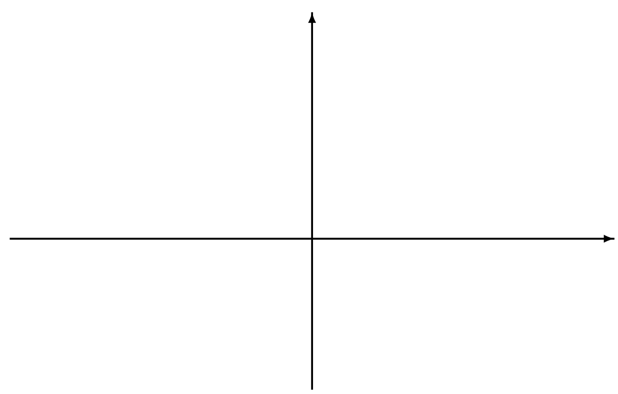
3. $$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ -9y + 6x &= 12 \end{aligned}$$

Aufg.: 17 - 52 ; ...

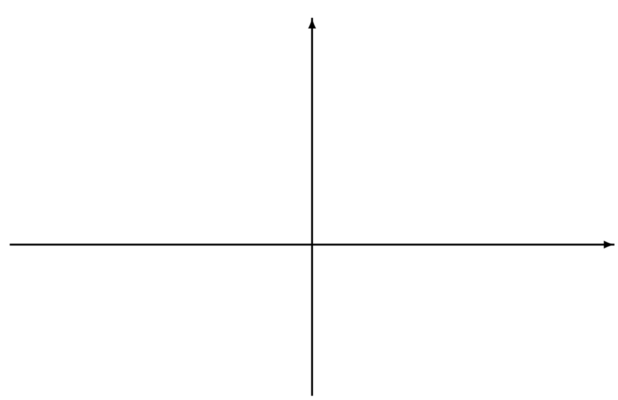
Mit Hilfe der geometrischen Interpretation eines linearen 2×2 Gleichungssystems wollen wir uns mit der Lösbarkeit beschäftigen.

Beispiel 5.2.2 Stelle die folgenden Gleichungssysteme graphisch dar:

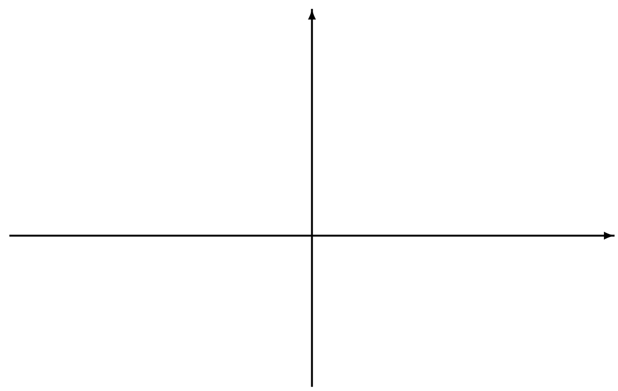
1. $$\begin{array}{rcl} -2x + y & = & 3 \\ 2x + 2y & = & -5 \end{array}$$



2. $$\begin{array}{rcl} 2 - y & = & 3x \\ 3y + 9x & = & -6 \end{array}$$



3. $$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ -9y + 6x &= 12 \end{aligned}$$



Wir stellen fest ...

und fassen zusammen, dass für die Lösbarkeit eines beliebigen linearen 2×2 Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad ax + by &= e \\ \text{(II)} \quad cx + dy &= f \end{aligned}$$

der folgende Ausdruck entscheidend ist:

Aufg.: 5 - 16 ; ...

Wir schliessen dieses Kapitel mit drei *nicht-linearen* 2×2 - Gleichungssysteme, welche sich auf *lineare* Gleichungssysteme zurückführen lassen:

Beispiel 5.2.3 Bestimme jeweils die Lösungen der folgenden 2×2 - Gleichungssystemen:

1. $$\begin{array}{rcrcc} 1:(y+1) & + & 1:(y-1) & = & (10-x):(y^2-1) \\ 1:(x-2) & + & 3:(y-4) & = & 5:(2-x) \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcrcr} \dfrac{8}{x-y} & - & \dfrac{9}{x+y} & = & \dfrac{11}{15} \\[2ex] \dfrac{6}{x-y} & - & \dfrac{5}{x+y} & = & \dfrac{2}{3} \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rcrcr} 3x^{-2} & - & 7y^{-2} & = & 5 \\ 5x^{-2} & + & 3y^{-2} & = & 12 \end{array}$$

Aufg.: 75 - 86 ; 76b, 77b, 81a, 82b, 85a

5.3 Das Gauβ'sche Eliminationsverfahren

Wir kommen nun zu einem neuen Lösungsverfahren, welches uns das Lösen von Gleichungssystemen höherer Ordnung sehr vereinfachen wird und beginnen wieder mit einem Beipiel:

Beispiel 5.3.1 Löse das folgende lineare 3×3 Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

1. mit dem *Gleichsetzungsverfahren:*

2. mit dem *Einsetzungsverfahren:*

.

3. mit dem *Gaußverfahren:*

   Das Lösungsverfahren nach Gauß baut auf den uns schon bekannten *Äquivalenzumforungen* auf, welche sind

   -
   -

In der Anwendung sieht das dann wie folgt aus:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

<u>*Die Idee des Gauß-Algorithums/ Eliminatonsverfahrens:*</u>

5.4 Lineare $n \times n$ Gleichungssysteme

Wir sprechen von einem *linearen (quadratischen)* $n \times n$ *Gleichungssystem*, wenn ...

Beispiel 5.4.1 Wir werden die folgenden Gleichungssyteme gemeinsam lösen und mögliche Vereinfachungen in den Darstellungen besprechen:

1. $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 10 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & 4 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 7y & = & 10 \\ 3x & + & 8z & = & 13 \\ 3y & + & 5z & = & 16 \end{array}$$

Aufgaben : Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:

1.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -2 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 3 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 1 \\ 2y & - & z & = & 0 \\ -8y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 1 \\ 2y & - & z & = & 0 \\ -8y & + & 4z & = & 0 \end{array}$$

Aufg.: 133-147, 159 ; ...

Aufgaben : Löse das folgende Gleichungssystem mit Hilfe des Gauβ' Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} a & + & 2b & - & c & + & d & = & -2 \\ 2a & + & b & + & 2c & - & d & = & 7 \\ a & - & b & - & c & + & 2d & = & -3 \\ a & + & 2b & - & 2c & + & d & = & -4 \end{array}$$

Aufg.: 149 - 152 ; ...

5.5 Lineare $m \times n$ Gleichungssysteme

Wir sprechen von einem *linearen $m \times n$ Gleichungssystem*, wenn ...

Aufgaben : Gib ein Beispiel eines linearen 4×3 Gleichungssystems an und löse es mit Hilfe des Gauβ - Verfahren:

Aufgaben : Gib ein Beispiel eines linearen 3×5 Gleichungssystems an und löse es mit Hilfe des Gauβ - Verfahren:

Aufg.: 153 - 155 ; ...

5.6 Lineare Gleichungssysteme mit Parametern

Neben den Variablen lassen sich in einem Gleichungssytem auch *Parameter* einführen. Die Lösungsmethoden bleiben die gleichen, nur die Fragestellungen lassen sich interessanter gestalten:

Beispiel 5.6.1 Bestimme $\mathbf{k}$ so, dass das folgende Gleichungssystem

1. genau eine Lösung,
2. keine Lösung,
3. unendlich viele Lösungen

hat:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & \mathbf{k}z & = & 4 \\ 5x & + & 6y & - & 7z & = & 8 \\ 9x & - & 10y & - & 11z & = & 12 \end{array}$$

Aufgaben : Diskutiere vollständig das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & \alpha x_2 & - & x_3 & = & \beta \end{array}$$

Aufg.: 70, 71, 73, 160 ; ...

5.7 Textaufgaben

Für das Lösen von Textaufgaben mit mehreren Unbekannten gehen wir zur Erstellung der Lösungsgleichung analog zum Verfahren vor, welches wir schon im Kapitel 3 *Gleichungslehre* kennen gelernt haben ...

-
-
-
-

und können für das Lösen gegebenenfalls das *Gauß' sche Eliminationsverfahren* anwenden.

Beispiel 5.7.1 *Willi und Fritz sind zwei Brüder. Vor 4 Jahren war Willi 4mal so alt wie Fritz und in 2 Jahren wird er noch doppelt so alt sein.*
Wie alt sind die Brüder heute?

Beispiel 5.7.2 *Eine dreistellige Zahl, deren Wert bei der Vertauschung der beiden ersten Ziffern nicht ändert, hat die Quersumme 15. Werden die letzten beiden Ziffern vertauscht, so nimmt der Wert der Zahl um 27 zu.*
Wie lautet die Zahl?

Aufg.: 163 - 165 ; ...

Beispiel 5.7.3 *Bestimme die Parameter a, b und c so, dass die Gleichung*

$$z = ax + by + c$$

die folgenden Lösungen hat:

$$(9/8/5), (-4/-4/-1), (6/5/2)$$

Aufg.: 167, 168 ; ...

5.7.1 Mischaufgaben

Nicht vergessen: Die Möglichkeit der Anwendung des Prinzips der *Drei-* bzw. *Zweisätzen*:

Beispiel 5.7.4 *Wir betrachten 5kg einer 4%igen Sole, d.h.:*

1. *Mit wieviel kg Wasser muss die Sole ergänzt werden, damit der Salzgehalt auf 3% sinkt?*

2. *Wieviel kg Salz muss der verdünnten Lösung beigegeben werden, damit der Salzgehalt wieder bei 4% liegt?*

3. *Wieviel kg einer 1%igen Sole müssen nun zugeführt werden, um eine 2%ige Salzlösung zu erhalten?*

Aufgaben : Wir gehen von 10kg einer 3%igen Sole aus.

1. Wieviel kg Wasser sind in der Sole enthalten ?

2. Wie gross ist der Salzanteil (in %) wenn der *ursprünglichen* Sole

   (a) …2.5 kg Wasser zugeführt werden.

   (b) …15g Salz zugeführt werden.

   (c) …1 kg Wasser entzogen werden.

   (d) …12g Salz entzogen werden.

   (e) …2kg einer 4%igen Sole zugeführt werden.

5.7.2 Leistungsaufgaben

Wir wollen uns mit den folgenden Fragen an das Lösungsverfahren von *Leistungsaufgaben* heranarbeiten und gehen von folgender Situation aus:

- Ein Behälter hat zwei Zuleitungen A und B.
  Die Leitung A füllt den Behälter in 3 Stunden, die Leitung B in 10 Stunden.

  - Wie weit füllt sich der Behälter, wenn beide Leitungen 1 Stunde geöffnet sind ?

  - Wie weit füllt sich der Behälter, wenn beide Leitungen 2 Stunden geöffnet sind ?

  - Wie lange müssen beide Leitungen gleichzeitig geöffnet bleiben, um den Behälter ganz zu füllen?

  - Die Leitung A wird nach 2 Stunden geschlossen und dafür B geöffnet. Wie lange muss B geöffnet bleiben um den Behälter zu füllen ?

  - Nachdem B schon eine 1/2 Stunde läuft, wird die Leitung A noch zugeschaltet.
    Wie lange dauert es noch, bis der Behälter zur Hälfte gefüllt ist ?

- Ein Behälter hat dieses mal drei Zuleitungen, wobei die Leitung A den Behälter in 3 Stunden zur Hälfte, die Leitung B den Behälter in 4 Stunden ganz und die Leitung C den Behälter in 2 Stunden zu einem Viertel füllt.

  - Wie weit füllt sich der Behälter, wenn alle drei Leitungen während einer Stunde geöffnet sind ?

  - Wie lange müssen alle drei Leitungen gleichzeitig geöffnet bleiben, um den Behälter ganz zu füllen ?

  - Die Leitung A wird nach einer 1/2 Stunde geschlossen, anschliessend wird die Leitung B für 1 Stunde geöffnet.
    Wie lange muss die Leitung C jetzt noch geöffnet werden, um den Behälter ganz zu füllen ?

  - Nachdem die Leitung A schon während einer 1/2 Stunde läuft, wird die Leitung B zugeschaltet. Nach einer weiteren Stunde wird noch die Leitung C geöffnet.
    Wie lange sind die drei Leitungen gleichzeitig geöffnet, um den Behälter ganz zu füllen ?

Beispiel 5.7.5 *Ein Wasserbehälter kann durch die drei Zuleitungen A, B und C gefüllt werden, und zwar durch A und B in c Minuten, durch A und C in b Minuten und durch B und C in a Minuten.*

In wieviel Minuten kann der Behälter durch jede Leitung einzeln gefüllt werden?

In wieviel Minuten kann der Behälter durch alle drei Leitungen gemeinsam gefüllt werden?

Aufg.: 170