Lineare Gleichungssysteme

(HMS - Version)

Kapitel 5

aus meinem Lehrgang *ALGEBRA*

Ronald Balestra
CH - 7028 St. Peter
www.ronaldbalestra.ch
e-mail: theorie@ronaldbalestra.ch

7. September 2008

Überblick über die bisherigen *ALGEBRA* - Themen:

1 **Mengenlehre**

1.1 Die Menge im mathematischen Sinne
1.2 Darstellungsformen
1.3 Teilmengen
1.4 Rechnen mit Mengen
1.5 Mengen im Koordinatensystem
1.6 Rechnen in Mengen

2 **Termumformungen**

2.1 Grundbegriffe
2.2 Einfache Termumformungen
2.3 Das Rechnen mit Polynomen
2.4 Das Rechnen mit Brüchen

3 **Gleichungslehre**

3.1 Aussagen, Aussageformen & Gleichungen
3.2 Das Lösen von Gleichungen
3.3 Lineare Gleichungen & deren Diskussion
3.4 Bruchgleichungen
3.5 Quadratische Gleichungen
3.6 Textaufgaben
3.7 Noch einige Aufgaben

4 **Potenzen, Wurzeln & Logarithmen**

4.1 Einführung
4.2 Das Rechnen mit Potenzen
4.3 Potenzgleichungen
4.4 Der Logarithmus
4.5 Anwendungen

Inhaltsverzeichnis

5 Lineare Gleichungssysteme

5.1 Überblick

Wir beginnen mit der Repetition der Lösungsmethoden von linearen 2×2 Gleichungssystemen und werden mit Hilfe der geometrischen Interpretation deren *Lösbarkeitsbedingungen* diskutieren. Neu werden wir das *Gauß'sche Eliminationsverfahren* kennenlernen, welches vor allem bei *lineare $n \times m$ Gleichungssytemen*, mit $n, m \geq 3$ zur Anwendung kommt.
Die Einführung von *Parametern* in die Gleichungssyteme ermöglicht uns einmal mehr eine Diskussion der Lösbarkeitsbedingungen.
Wir schliessen dieses Kapitel mit einigen Beispielen zu *Textaufgaben*.

Begleitend wird die Aufgabensammlung von

Deller/Gebauer/Zinn: *Algebra 1*, Verlag OrellFüssli

verwendet.

5.2 Lineare 2×2 Gleichungssysteme

Was ist ein lineares 2×2 Gleichungssystem ?

Wir wollen an den folgenden Beispielen unsere Lösungsmethoden repetieren:

Beispiel 5.2.1

1. $$\begin{aligned} -2x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= -5 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 2 - y &= 3x \\ 3y + 9x &= -6 \end{aligned}$$

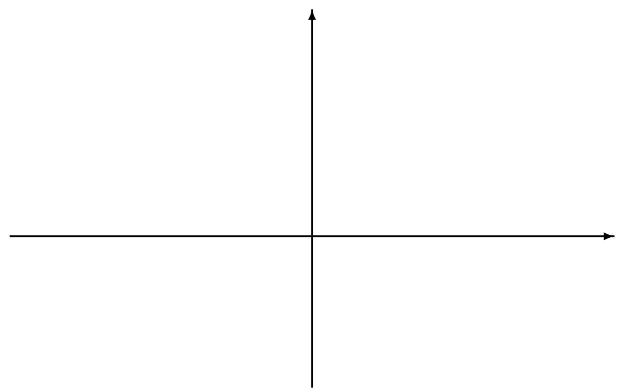
3. $$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ -9y + 6x &= 12 \end{aligned}$$

Aufg.: 17 - 52 ; ...

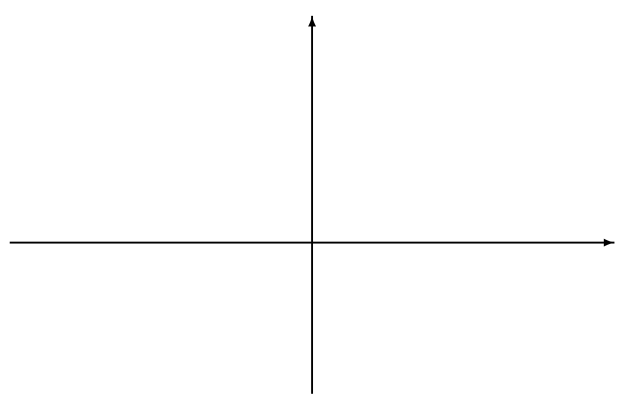
Mit Hilfe der geometrischen Interpretation eines linearen 2×2 Gleichungssystems wollen wir uns mit der Lösbarkeit beschäftigen.

Beispiel 5.2.2 Stelle die folgenden Gleichungssysteme graphisch dar:

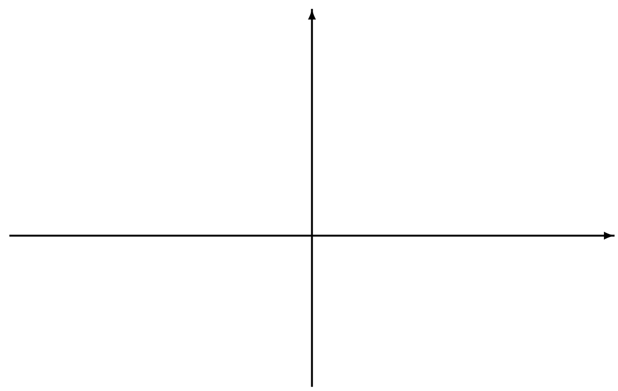
1. $$\begin{aligned} -2x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= -5 \end{aligned}$$



2. $$\begin{aligned} 2 - y &= 3x \\ 3y + 9x &= -6 \end{aligned}$$



3. $$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ -9y + 6x &= 12 \end{aligned}$$



Wir stellen fest ...

und fassen zusammen, dass für die Lösbarkeit eines beliebigen linearen 2×2 Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad ax + by &= e \\ \text{(II)} \quad cx + dy &= f \end{aligned}$$

der folgende Ausdruck entscheidend ist:

Aufg.: 17 - 52 ; ...

Wir schliessen dieses Kapitel mit drei *nicht-linearen* 2×2 - Gleichungssysteme, welche sich auf *lineare* Gleichungssysteme zurückführen lassen:

Beispiel 5.2.3 Bestimme jeweils die Lösungen der folgenden 2×2 - Gleichungssystemen:

1. $$\begin{array}{rcrcc} 1:(y+1) & + & 1:(y-1) & = & (10-x):(y^2-1) \\ 1:(x-2) & + & 3:(y-4) & = & 5:(2-x) \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcrcr} \dfrac{8}{x-y} & - & \dfrac{9}{x+y} & = & \dfrac{11}{15} \\[2ex] \dfrac{6}{x-y} & - & \dfrac{5}{x+y} & = & \dfrac{2}{3} \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rcrcr} 3x^{-2} & - & 7y^{-2} & = & 5 \\ 5x^{-2} & + & 3y^{-2} & = & 12 \end{array}$$

Aufg.: 75 - 86 ; 76b, 77b, 81a, 82b, 85a

5.3 Das Gauβ'sche Eliminationsverfahren

Wir kommen nun zu einem neuen Lösungsverfahren, welches uns das Lösen von Gleichungssystemen höherer Ordnung sehr vereinfachen wird und beginnen wieder mit einem Beipiel:

Beispiel 5.3.1 Löse das folgende lineare 3×3 Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

1. mit dem Gleichsetzungsverfahren:

2. mit dem Einsetzungsverfahren:

.

3. mit dem *Gauβverfahren:*
Das Lösungsverfahren nach Gauβ baut auf den uns schon bekannten *Äquivalenzumforungen* auf, welche sind

-
-

Die Idee des Gauβ-Algorithums/ Eliminatonsverfahrens:

5.4 Lineare $n \times n$ Gleichungssysteme

Wir sprechen von einem *linearen (quadratischen)* $n \times n$ *Gleichungssystem*, wenn ...

Beispiel 5.4.1 Wir werden die folgenden Gleichungssyteme gemeinsam lösen und mögliche Vereinfachungen in den Darstellungen besprechen:

1. $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 10 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & 4 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 7y & = & 10 \\ 3x & + & 8z & = & 13 \\ 3y & + & 5z & = & 16 \end{array}$$

Aufgaben : Löse das folgende Gleichungssystem und formuliere in eigenen Worten den Gauβ' Algorithmus:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
a & + & 2b & - & c & + & d & = & -2 \\
2a & + & b & + & 2c & - & d & = & 7 \\
a & - & b & - & c & + & 2d & = & -3 \\
a & + & 2b & - & 2c & + & d & = & -4
\end{array}$$

Aufg.: 133 - 148

5.5 Lineare $m \times n$ Gleichungssysteme

Wir sprechen von einem *linearen* $m \times n$ *Gleichungssystem*, wenn ...

Aufgaben : Gib ein Beispiel eines linearen 4×3 Gleichungssystems an und löse es mit Hilfe des Gauβ - Verfahren:

Aufg.: 149 - 160 ; ...

5.6 Lineare Gleichungssysteme mit Parametern

Neben den Variablen lassen sich in einem Gleichungssytem auch *Parameter* einführen. Die Lösungsmethoden bleiben die gleichen, nur die Fragestellungen lassen sich interessanter gestalten:

Beispiel 5.6.1 Bestimme **k** so, dass das folgende Gleichungssystem

1. genau eine Lösung,
2. keine Lösung,
3. unendlich viele Lösungen

hat:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & \mathbf{k}z & = & 4 \\ 5x & + & 6y & - & 7z & = & 8 \\ 9x & - & 10y & - & 11z & = & 12 \end{array}$$

<u>*Aufg.:*</u> 53 - 71, ; ...

Aufgaben : Diskutiere vollständig das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -2x1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & \alpha x_2 & - & x_3 & = & \beta \end{array}$$

5.7 Textaufgaben

Für das Lösen von Textaufgaben mit mehreren Unbekannten gehen wir zur Erstellung der Lösungsgleichung analog zum Verfahren vor, welches wir schon im Kapitel 3 *Gleichungslehre* kennen gelernt haben ...

-
-
-
-

und wenden für das Lösen das *Gauß' sche Eliminationsverfahren* an.

Beispiel 5.7.1 *Bestimme die Parameter a, b und c so, dass die Gleichung*

$$z = ax + by + c$$

die folgenden Lösungen hat:

$$(9/8/5), (-4/-4/-1), (6/5/2)$$

Beispiel 5.7.2 *Eine dreistellige Zahl, deren Wert bei der Vertauschung der beiden ersten Ziffern nicht ändert, hat die Quersumme 15. Werden die letzten beiden Ziffern vertauscht, so nimmt der Wert der Zahl um 27 zu.*
Wie lautet die Zahl?

Beispiel 5.7.3 *Ein Wasserbehälter kann durch die drei Zuleitungen A, B und C gefüllt werden, und zwar durch A und B in c Minuten, durch A und C in b Minuten und durch B und C in a Minuten.*

> *In wieviel Minuten kann der Behälter durch jede Leitung einzeln gefüllt werden?*
>
> *In wieviel Minuten kann der Behälter durch alle drei Leitungen gemeinsam gefüllt werden?*

Aufg.: 163 - 176, ; ...