Lineare Gleichungssysteme

ALGEBRA - Kapitel 5

MNProfil - Gymnasiale Mittelstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

7. Mai 2024

Die *QR* - Codes
zu den
Linearen
Gleichungssysteme
MNProfil

zum aktuellen Skript

zur Homepage

zur Übersicht *Algebra*

zu den Lin Gleichungssysteme

zu den Aufgaben & Lösungen

Überblick über die bisherigen *ALGEBRA* - Themen:
(in den MNProfil-Versionen)

1 **Mengenlehre**

1.1 Die Menge im mathematischen Sinne

1.2 Darstellungsformen

1.3 Teilmengen

1.4 Rechnen mit Mengen

1.5 Mengen im Koordinatensystem

1.6 Rechnen in Mengen

1.7 Eine Gruppe - verschiedene Beispiele/Anwendungen

2 **Termumformungen**

2.1 Grundbegriffe

2.2 Einfache Beweisführungen in der Mathematik

2.3 Das Rechnen mit Polynomen

2.4 Das Rechnen mit Brüchen

Zur **Faktorzerlegung von Polynomen 2. Grades** -
eine Trilogie von **Lernaufgaben** *in vier Teilen*

Sie deckt die Kapitel 2.3 und 2.4 (ohne den Divisionsalgorithmus) ab.

Teil 1 Die Herleitung & Anwendung der Binomischen Formeln

Teil 2 Die Herleitung & Anwendung des Klammeransatzes

Teil 3 Anwendungen des in Teil 1 & 2 erlernten Wissens

3 **Gleichungslehre**

Teil 1

3.1 Aussagen, Aussageformen & Gleichungen

3.2 Das Lösen von Gleichungen

3.3 Lineare Gleichungen mit Parametern & deren Diskussion
3.3.3 Die Mächtigket der Lösungsmenge - *eine Lernaufgabe*

3.4 Die Lösungsverfahren für Bruchgleichungen

Teil 2

3.5 Quadratische Gleichungen
3.5.1 Bruchgleichungen & Biquadratische Gleichungen - *eine Lernaufgabe*

3.6 Textaufgaben - *ein Unterrichtspuzzle*

3.7 Der Satz von Vieta

3.8 Kubische Gleichungen

4 **Potenzen, Wurzeln & Logarithmen**

4.1 Einführung

4.2 Das Rechnen mit Potenzen

4.3 Potenzgleichungen

4.4 Der Logarithmus

4.5 Anwendungen

4.6 Weitere Beispiele & Anwendungen

Inhaltsverzeichnis

5 Lineare Gleichungssysteme **1**

5.1 Überblick . . . 1

5.2 Lineare 2×2 Gleichungssysteme . . . 1

5.3 Das Gauβ'sche Eliminationsverfahren . . . 5

5.3.1 *Nicht-lineare* Gleichungssysteme . . . 6

5.4 Lineare $n \times n$ Gleichungssysteme . . . 10

5.5 Lineare $m \times n$ Gleichungssysteme . . . 15

5.6 Lineare Gleichungssysteme mit Parametern . . . 18

5.6.1 Weitere Aufgaben zur Diskussion... . . . 20

5.7 Textaufgaben . . . 24

5.7.1 Leistungsaufgaben . . . 26

5.8 Matrizenkalkül . . . 29

5.8.1 Definitionen & Begriffe . . . 29

5.8.2 Rechenoperationen & der Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen . . . 31

5.8.3 Die Inverse einer Matrix . . . 35

5.8.4 Die Bestimmung der Inversen mit dem Gauβ-Algorithmus 38

5.8.5 Die Determinante . . . 44

5.8.6 Folgerungen aus der Multilinearität & Schiefsymmetrie . . 49

5.8.7 Die Berechnung der Determinante mit Hilfe von Gauss . . 52

5.8.8 Die Berechnung der Determinante mit Hilfe von Laplace . 55

5.8.9 Matrizen & Mathematica . . . 56

5.9 Mehrstufige Prozesse . . . 57

5.10 *Meine* Zusammenfassung . . . 66

5 Lineare Gleichungssysteme

5.1 Überblick

Wir beginnen mit der Frage *Was ist ein lineares* 2×2 *Gleichungssytem?* und werden mit Hilfe der geometrischen Interpretation deren *Lösbarkeitsbedingungen* diskutieren und den Begriff der *Determinante* einführen. An Beispielen werden wir die *Lösungsmethoden* für diese Systeme, welche wir aus dem *Leitprogramm* zur Einführung der affine Funktionen schon kennen, *wiederholen* und neu das *Gauß'sche Eliminationsverfahren* kennenlernen.
Dieses weren wir vor allem bei *lineare* $n \times m$ *Gleichungssytemen*, mit $n, m \geq 3$ zur Anwendung bringen. Insbesondere auch bei der *Diskussion der Lösbarkeitsbedingungen*, welche uns einmal mehr durch das Einführen von Paremetern ermöglicht wird.
Über die linearen Gleichungssystemen werden wir den Begriff der *Matrix* einführen und uns mit dem *Rechnen mit Matrizen* befassen, was uns u.a. (wieder) auf die Begriffe der *Inversen* und der *Determinante* bringen wird. Die wir natürlich mit Hilfe von *Gauß* auch von Hand berechnen werden.
Die Verwendung von *Mathematica* ermöglicht uns dann den zum Teil grossen Rechenaufwand zu verkleinern und uns abschliessend in den Anwendungen mit *Mehrstufigen Prozessen* zu befassen.

Begleitend verwenden wir, neben eigenen Aufgaben, die Aufgabensammlung von

Deller/Gebauer/Zinn: *Algebra 1*, Verlag OrellFüssli

5.2 Lineare 2×2 Gleichungssysteme

Was ist ein lineares 2×2 Gleichungssystem ?

$$\begin{array}{rrcl} \text{(I)} & ax + by & = & e \\ \text{(II)} & cx + dy & = & f \end{array}$$

<u>*Bem.:*</u>

-
-
-

Wenn wir die Gleichungen (I) und (II) nach y auflösen, ermöglicht uns diese *äquivalente* Darstellung eine geometrische Interpretation:

$$\text{(I)} \qquad ax + by = e \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x + \frac{e}{b}$$

ist ...

mit ...

und hat als Lösungsmenge ...

$$\text{(II)} \qquad cx + dy = f \quad \Leftrightarrow \quad y =$$

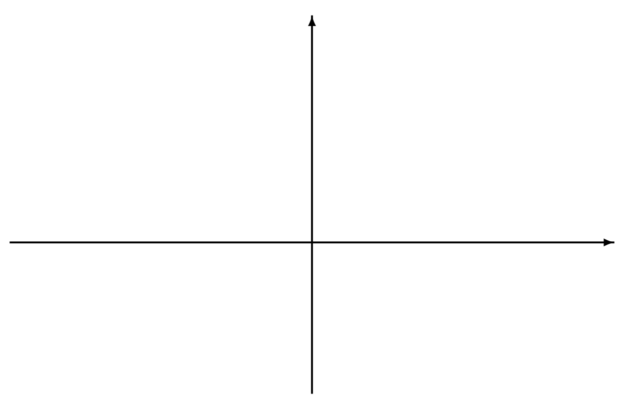
ist ...

mit ...

und hat als Lösungsmenge ...

Die *Lösungsmenge des Gleichungssystems* ist nun die Menge aller Elemente (in diesem Fall also die Menge aller Punkte (x/y)), welche die Gleichung (I) *und* die Gleichung (II) erfüllen.

Graphische Interpretation



Aus der graphischen Darstellung lassen sich sofort die *Lösbarkeitsbedingungen* für ein lineares 2×2 Gleichungssytem ableiten:

- Es existiert genau eine Lösung $\Leftrightarrow$

- Es existiert keine Lösung $\Leftrightarrow$

- Es existieren genau zwei Lösungen $\Leftrightarrow$

- Es existieren genau drei Lösungen $\Leftrightarrow$

$\vdots$

- Es existieren unendlich viele Lösungen $\Leftrightarrow$

Entscheidend für die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrcl} \text{(I)} & ax + by & = & e \\ \text{(II)} & cx + dy & = & f \end{array}$$

ist somit folgender Ausdruck:

Beispiel 5.1. Bestimme die Lösungen nur in den Fällen, wo sie existiert und eindeutig bestimmt ist:

$$\begin{aligned} -2x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - y &= 3x \\ 3y + 9x &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ -9y + 6x &= 12 \end{aligned}$$

Aufg.: 5 - 16 ; 5, 11a, 12b, 14, 15b, 16a

5.3 Das Gauβ'sche Eliminationsverfahren

Wir werden im Folgenden ein neues Lösungsverfahren kennenlernen,

das *Gauss'sche Eliminations-* oder *Additionsverfahren*,

welches uns auf einfache Art und Weise auch das Lösungen linearer Gleichungssysteme höheren Grades erlaubt.

Beginnen werden wir mit einer kurzen Repetition uns schon bekannter Methoden zum Lösen linearer 2×2 Gleichungssyteme:

Beispiel 5.2. Löse das folgende Gleichungssytem auf verschiedene Wege:

- $$\begin{array}{rcrcr} 5x & - & y & = & 7 \\ 4x & + & y & = & 7 \end{array}$$

- $$\begin{array}{rcrcr} 5x & - & y & = & 7 \\ 4x & + & y & = & 7 \end{array}$$

- $$\begin{array}{rcrcr} 5x & - & y & = & 7 \\ 4x & + & y & = & 7 \end{array}$$

Aufg.: 17 - 52 ; . . .

5.3.1 *Nicht-lineare* Gleichungssysteme

Wir schliessen den Repetitionsteil mit drei *nicht-linearen* 2×2 - Gleichungssysteme, welche sich auf *lineare* Gleichungssysteme zurückführen lassen:

Beispiel 5.3. Bestimme jeweils die Lösungen der folgenden 2×2 - Gleichungssystemen:

- $$\begin{array}{rcrcr} 1:(y+1) & + & 1:(y-1) & = & (10-x):(y^2-1) \\ 1:(x-2) & + & 3:(y-4) & = & 5:(2-x) \end{array}$$

- $$\begin{aligned} \frac{8}{x-y} - \frac{9}{x+y} &= \frac{11}{15} \\ \frac{6}{x-y} - \frac{5}{x+y} &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 3x^{-2} - 7y^{-2} &= 5 \\ 5x^{-2} + 3y^{-2} &= 12 \end{aligned}$$

Aufg.: 75 - 86 ; 76b, 77b, 81a, 82b, 85a

Wir kommen nun endlich zum Gauβ' schen Eliminationsverfahren.
Das Lösungsverfahren nach Gauβ baut auf den uns schon bekannten *Äquivalenzumforungen* auf, welche sind

•

•

Wir werden das folgende Beispiel mit Hilfe des *Gauβ-Verfahren* lösen um anschliessend den zugehörigen *Algorithmus* zu formulieren:

Beispiel 5.4. Löse das folgende lineare 3×3 Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

1. mit dem Gleichsetzungsverfahren:

2. mit dem Einsetzungsverfahren:

3. mit dem Gauβverfahren:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

Die Idee des Gauβ-Algorithums:

5.4 Lineare $n \times n$ Gleichungssysteme

Wir sprechen von einem *linearen (quadratischen) $n \times n$ Gleichungssystem*, wenn …

Beispiel 5.5. Wir werden die folgenden Gleichungssyteme gemeinsam lösen und mögliche Vereinfachungen in den Darstellungen besprechen:

1. $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 10 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & 4 \end{array}$$

2.

$$
\begin{array}{rcrcr}
4x & + & 7y & = & 10 \\
3x & + & 8z & = & 13 \\
y & + & 5z & = & 12
\end{array}
$$

Aufgaben 5.1. *Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:*

1.
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -2 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 3 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 1 \\ 2y & - & z & = & 0 \\ -8y & + & 4z & = & 0 \end{array}$$

3.
$$\begin{aligned} x + 2y &= 3z - 1 \\ 3x - y &= -2z + 7 \\ 4z + 2 &= 5x + 3y \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} 2x+3y-z &= 2t-1 \\ 2t+y &= 2x+2s \\ x+y+z+s+t &= 3 \\ 3+2s+t &= 8x+2y+z \\ x-z+s &= t+1 \end{aligned}$$

Aufg.: 133-147, 159 ; ...

5.5 Lineare $m \times n$ Gleichungssysteme

Wir sprechen von einem *linearen $m \times n$ Gleichungssystem*, wenn ...

Aufgaben 5.2. *Gib ein Beispiel eines linearen 4×3 Gleichungssystems an und löse es mit Hilfe des Gauß-Verfahren:*

Aufgaben 5.3. *Gib ein Beispiel eines linearen 3×5 Gleichungssystems an und löse es mit Hilfe des Gauß-Verfahren:*

Aufg.: 153 - 155 ; ...

Zusammenfassung der *Interpretationsmöglichkeiten der letzten Zeile*:

5.6 Lineare Gleichungssysteme mit Parametern

Neben den Variablen lassen sich in einem Gleichungssytem auch *Parameter* einführen. Die Lösungsmethoden bleiben die gleichen, nur die Fragestellungen lassen sich interessanter gestalten:

Beispiel 5.6. Bestimme **k** so, dass das folgende Gleichungssystem

1. genau eine Lösung,
2. keine Lösung,
3. unendlich viele Lösungen

hat:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & \mathbf{k}z & = & 4 \\ 5x & + & 6y & - & 7z & = & 8 \\ 9x & - & 10y & - & 11z & = & 12 \end{array}$$

Aufgaben 5.4. *Diskutiere vollständig das folgende Gleichungssystem:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & \alpha x_2 & - & x_3 & = & \beta \end{array}$$

<u>*Aufg.:*</u> 70, 71, 73, 160 ; ...

5.6.1 Weitere Aufgaben zur Diskussion...

1. Welche der folgenden Gleichungssysteme haben keine, genau eine oder unendliche viele Lösungen?

(a) $$\begin{array}{rcrcr} -5x & + & 3y & = & 12 \\ 4x & - & y & = & 2 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 1 \\ x & + & y & = & -1 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 4 \\ \frac{1}{2}x & - & \frac{1}{3}y & = & \frac{1}{4} \end{array}$$

(d) $$\begin{array}{rcrcr} 372x & - & 12y & = & 0 \\ -31x & + & y & = & 0 \end{array}$$

(e) $$\begin{array}{rcrcr} 372x & - & 12y & = & 3 \\ -31x & + & y & = & -\frac{1}{4} \end{array}$$

(f) $$\begin{array}{rcrcr} 372x & - & 12y & = & -4 \\ -31x & + & y & = & \frac{1}{3} \end{array}$$

2. Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:

(a) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2w & = & 4 \\ 3x & + & 3y & + & 3z & - & 3w & = & 5 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & + & 3w & = & 2 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & + & 4w & = & 5 \\ 5x & + & 10y & - & 8z & + & 11w & = & 12 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ x & + & 3y & + & z & = & 11 \\ 2x & + & 5y & - & 4z & = & 13 \\ 2x & + & 6y & + & 2z & = & 22 \end{array}$$

(d) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

(e) $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 5x & + & 3y & - & 4z & = & 2 \end{array}$$

3. Bestimme **p**, so dass genau eine Lösung existiert.

(a) $\begin{array}{rcrcl} \mathbf{p}x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & 3y & = & 1 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 3\mathbf{p}y & = & 7 \\ x & + & 2y & = & 4 \end{array}$

(c) $\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 1 \\ \mathbf{p}x & - & \mathbf{p}^2y & = & 2 \end{array}$ (d) $\begin{array}{rcrcl} 5x & - & 3y & = & 0 \\ \mathbf{p}x & + & 4y & = & 1 \end{array}$

(e) $\begin{array}{rcrcl} 5x & - & 3y & = & -1 \\ \mathbf{p}x & + & 4y & = & 0 \end{array}$ (f) $\begin{array}{rcrcl} 5x & - & 3y & = & \mathbf{p}^2 \\ \mathbf{p}x & + & 4y & = & 0 \end{array}$

4. Die folgenden Gleichungssysteme sind vollständig zu diskutieren:
(d.h.: Bestimme die Bedingungen, unter welchen das Gleichungssystem keine, genau ein oder unendliche viele Lösungen hat und gib jeweils die Lösungen explizit an.)

(a) $\begin{array}{rcrcl} 3x & + & y & = & 1 \\ 2y & - & z & = & 0 \\ -8y & + & pz & = & 0 \end{array}$

(b) $\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & (r+1)y & - & \frac{p}{2}z & = & 2 \\ 6x & + & 2ry & & & = & 4 \\ -3x & + & (1-r)y & + & (q+\frac{p}{2})z & = & 0 \end{array}$

5. Was für Bedingungen müssen die Parameter $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ erfüllen, damit das folgende Gleichungssystem eine Lösung hat ?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & \mathbf{a} \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & \mathbf{b} \\ x & - & 2y & + & 7z & = & \mathbf{c} \end{array}$$

6. Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:

(a) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -4 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -2 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 3 \end{array}$

(c) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -4 \\ 2x & - & y & + & z & = & -1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array}$ (d) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 12 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 11 \end{array}$

7. Welche der folgenden Gleichungssysteme haben genau eine Lösung:

(a)
$$\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 4y & = & 12 \\ -4x & - & 3y & = & 21 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 4y & = & 56 \\ -4x & - & 3y & = & 31 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 4y & = & 66785 \\ -4x & - & 3y & = & 0 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2x & - & 8z & = & 0 \\ 12x & + & 6x & + & 12z & = & 1 \\ & & -3x & + & 7z & = & 1 \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5a & + & 3b & - & 4c & + & 8d & = & 1 \\ 3a & + & b & - & 2c & + & 6d & = & -1 \\ -11a & + & 22b & + & 3c & - & 4d & = & 2 \end{array}$$

(f)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} a & + & 2b & - & 4c & + & 4d & + & e & = & 1 \\ -a & + & 4b & + & 3c & - & 5d & + & 2e & = & 8 \\ -2a & - & 4b & + & 8c & - & 8d & - & 2e & = & -2 \\ 3a & + & 4b & + & 2c & - & d & - & e & = & 0 \\ a & - & b & + & c & - & d & + & e & = & 2 \end{array}$$

Ausführliche Lösungen zu den Diskussionen der Aufgaben 4. & 5. sind zu finden unter ML-TheorieAufgaben

Lösungen :

1. (a) $\det = (-5) \cdot (-1) - 3 \cdot 4 = -7 \neq 0 \Rightarrow \exists!$ Lösung.
   (b) $\det = \ldots = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists!$ Lösung.
   (c) $\det \neq 0 \Rightarrow \exists!$ Lösung.
   (d) $\det = 0 \Rightarrow$ Spezialfall: $\mathrm{ed} = 0 = \mathrm{bf} \Rightarrow \infty$ - viele Lösungen.
   (e) $\det = 0 \Rightarrow$ Spezialfall: $\mathrm{ed} = 3 = \mathrm{bf} \Rightarrow \infty$ - viele Lösungen.
   (f) $\det = 0 \Rightarrow$ Spezialfall: $\mathrm{ed} = 4 = \mathrm{bf} \Rightarrow \infty$ - viele Lösungen.

2. (a) $\nexists$ Lösung.
   (b) $\mathrm{S} = (x/y/z/w) = (4 - 2y + w/y/1 + 2w/w),\ y, w \in \mathbb{R}$
   (c) $\mathrm{S} = (x/y/z) = (1/3/1)$
   (d) $\mathrm{S} = (x/y/z) = (\frac{2}{5}z/\frac{3}{5}z/z),\ z \in \mathbb{R}$
   (e) $\nexists$ Lösung.

3. (a) $\mathbf{p} \neq -\frac{2}{3}$
   (b) $\mathbf{p} \neq -\frac{4}{3}$
   (c) $\mathbf{p} \neq -1 \wedge \mathbf{p} \neq 0$
   (d) = (e) = (f) $\mathbf{p} \neq -\frac{20}{3}$

4. (a)
   - für $p \neq 4$ $\exists!$ Lösung: $\mathrm{S} = (x/y/z) = (\frac{1}{3}/0/0)$
   - für $p = 4$ $\exists\infty$ Lösungen: $\mathrm{S} = (x/y/z) = (\frac{1-\frac{z}{2}}{3}/\frac{z}{2}/z),\ z \in \mathbb{R}$
   - der Fall, dass *keine* Lösung existiert, tritt nie ein.

   (b)
   - für $p + q \neq 0$ $\exists!$Lösung: $\mathrm{S} = (x/y/z) = (\frac{2}{3} - \frac{rp}{3(p+q)}/\frac{p}{p+q}/\frac{2}{p+q})$
   - für $p + q = 0$ $\nexists$ Lösung.
   - der Fall, dass ∞ viele Lösungen existieren, tritt nie ein.

5. $-5a + 2b + c = 0$

6. Für alle Lösungen gilt: $\mathrm{S} = (x/y/z)$
   (a) S = (1.9/-0.7/-1.5)
   (b) S = (0/-1/0)
   (c) S = (-0.7/-0.9/-0.5)
   (d) S = (5/-2/0)

7. (a), (b), (c), (d)

5.7 Textaufgaben

Für das Lösen von Textaufgaben mit mehreren Unbekannten gehen wir zur Erstellung der Lösungsgleichung analog zum Verfahren vor, welches wir schon im ALGEBRA Kapitel 3 *Gleichungslehre* kennen gelernt haben ...

-
-
-
-

und können für das Lösen gegebenenfalls das *Gauß' sche Eliminationsverfahren* anwenden.

Beispiel 5.7. Wir gehen von einer Funktion $f(x)$ von folgendem Typ aus:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Die Funktion hat ...

- den Achsenabschnitt = -14,
- eine Nullstelle in -7
- und weiter gilt: $P = (-1/18) \in graph(f)$

Bestimme die Koeffizienten a, b und c.

Beispiel 5.8. Eine dreistellige Zahl, deren Wert bei der Vertauschung der beiden ersten Ziffern nicht ändert, hat die Quersumme 15. Werden die letzten beiden Ziffern vertauscht, so nimmt der Wert der Zahl um 27 zu.
Wie lautet die Zahl?

Aufg.: 163 - 165 ; . . . zugehörige Lösungen

5.7.1 Leistungsaufgaben

Wir wollen uns mit dem folgenden Beispiel an das Lösungsverfahren von *Leistungsaufgaben* heranarbeiten:

Beispiel 5.9. Ein Behälter hat zwei Zuleitungen A und B.
Die Leitung A füllt den Behälter in 3 Stunden, die Leitung B in 10 Stunden.

- Wie weit füllt sich der Behälter, wenn beide Leitungen 1 Stunde geöffnet sind ?

- Wie weit füllt sich der Behälter, wenn beide Leitungen 2 Stunden geöffnet sind ?

- Wie lange müssen beide Leitungen gleichzeitig geöffnet bleiben, um den Behälter ganz zu füllen?

- Die Leitung A wird nach 2 Stunden geschlossen und dafür B geöffnet.
  Wie lange muss B geöffnet bleiben um den Behälter zu füllen ?

- Nachdem B schon eine 1/2 Stunde läuft, wird die Leitung A noch zugeschaltet.
  Wie lange dauert es noch, bis der Behälter zur Hälfte gefüllt ist ?

Aufgaben 5.5. *Ein Behälter hat dieses mal drei Zuleitungen, wobei die Leitung A den Behälter in 3 Stunden zur Hälfte, die Leitung B den Behälter in 4 Stunden ganz und die Leitung C den Behälter in 2 Stunden zu einem Viertel füllt.*

- *Wie weit füllt sich der Behälter, wenn alle drei Leitungen während einer Stunde geöffnet sind ?*

- *Wie lange müssen alle drei Leitungen gleichzeitig geöffnet bleiben, um den Behälter ganz zu füllen ?*

- *Die Leitung A wird nach einer 1/2 Stunde geschlossen, anschliessend wird die Leitung B für nur 1 Stunde geöffnet und dann wieder geschlossen.*
  Wie lange muss die Leitung C jetzt noch geöffnet werden, um den Behälter ganz zu füllen ?

- *Nachdem die Leitung A schon während einer 1/2 Stunde läuft, wird die Leitung B zugeschaltet. Nach einer weiteren Stunde wird noch die Leitung C geöffnet.*
  Wie lange müssen die drei Leitungen gleichzeitig geöffnet sein, um den Behälter ganz zu füllen ?

Beispiel 5.10. Ein Wasserbehälter kann durch die drei Zuleitungen A, B und C gefüllt werden, und zwar durch A und B in c Minuten, durch A und C in b Minuten und durch B und C in a Minuten.

> In wieviel Minuten kann der Behälter durch jede Leitung einzeln gefüllt werden?
>
> In wieviel Minuten kann der Behälter durch alle drei Leitungen gemeinsam gefüllt werden?

Aufg.: 170

5.8 Matrizenkalkül

In unseren vereinfachten Darstellungen der lineraren Gleichungssysteme durch die *Koeffizientenmatrizen* ist der Begriff, welcher wir in diesem Abschnitt einführen und besprechen wollen, schon gefallen:

Der Begriff der **Matrix**

Wir werden im Folgenden das *Rechnen mit Matrizen* einführen und dies in *Zusammenhang mit den linearen Gleichungssystemen* bringen. Im Zusammenhang mit der Lösbarkeit eines Gleichungssystems werden wir natürlich auch die *Inverse* und die *Determinanten* besprechen.
In den Anwendungen werden wir uns mit *mehrstufigen Prozessen* beschäftigen und weitere Einsatzmöglichkeiten von *Mathematica* kennenlernen.

5.8.1 Definitionen & Begriffe

Def.: Eine rechteckige Anordnung von skalaren Grössen (aus $\mathbb{R}$) der folgenden Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heisst eine **$(m \times n)$ - Matrix** mit m *Zeilen* und n *Spalten*, mit $m, n \in \mathbb{N}$

Bem.:
- a_{ij} heisst ...

  und steht ...
- $M(m \times n, \mathbb{R}) :=$
- $M_n(\mathbb{Z}) :=$

Beispiel 5.11. Wir betrachten die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & 7 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

- A ist eine $(\ldots \times \ldots)$-Matrix.
- $a_{11} = \ldots$, $a_{22} = \ldots$, $a_{52} = \ldots$, $a_{42} = \ldots$, $a_{25} = \ldots$
- 2te Zeile =
- 3te Spalte =

Beispiel 5.12. Die Koeffizienten der Matrix $A \in M_6(\mathbb{R})$ sind wie folgt definiert:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \ \forall j \geq i \\ 0 & , \ \forall j = 1 \wedge i > 2 \\ 2 & , \ \forall i = j + 2 \wedge j > 1 \\ -1 & , \ \mathit{sonst} \end{cases}$$

Konstruiere A.

Beispiel 5.13. Gib jeweils ein Beispiel an, einer

1. (1×5) - Matrix:
2. (3×1) - Matrix:
3. (1×1) - Matrix:

5.8.2 Rechenoperationen & der Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen

Mit Hilfe der *Matrizenmultiplikation* wollen wir erreichen, dass sich jedes lineare $m \times n$ Gleichungssytem in der folgenden Form darstellen lässt:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad A &= \\ \vec{x} &= \\ \vec{b} &= \end{aligned}$$

und wir das Gleichungssystem lösen können, in dem wir

- die zugehörige *augmentierte Matrix* mit Hilfe des Gauβ-Verfahren in Dreiecksform bringen und die Lösungsvariablen durch Rückwärtseinsetzen bestimmen

  oder

- mit Hilfe der *Inversen* der Koeffizientenmatrix (falls existent) und den Regeln der Matrizenrechnung arbeiten:

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \\ A^{-1} \cdot A\vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \\ \mathbb{I}_n \cdot \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Beispiel 5.14. Zerlege das folgende Gleichungssytem in $A, \vec{x}$ und $\vec{b}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 2x & = & 4 & - & 3y & + & 8z \\ 2y & + & 3x & = & 1 & & \end{array}$$

Auf alle Fälle müssen wir zuerst die *Rechenoperationen mit Matrizen* definieren, welche uns überhaupt erlauben, unsere Gleichungssyteme in der Matrizenschreibweise darzustellen.

<u>Def.:</u> Seien $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}),\ C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ und $c \in \mathbb{R}$
Dann definieren wir:

- Die Addition/ Subtraktion:

$$C = A \pm B, \quad \text{mit } c_{ij} := a_{ij} \pm b_{ij}$$

- Die skalare Multiplikation:

$$C = k \cdot A, \quad \text{mit } c_{ij} := c \cdot a_{ij}$$

- Die Matrizenmultiplikation:

$$C = A \cdot B, \quad \text{mit } c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Beispiel 5.15. Gegeben sind die folgenden Grössen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ c = -1$$

Berechne

1. $A + B$

2. $k \cdot B$

3. $A \cdot B$

Bem.: • Erkläre die Äquivalenz zwischen einem linearen $(m \times n)$-Gleichungssystem und der Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$

Wir betrachten nun noch die Verknüpfungen von Matrizen beliebiger Form:

- *Addition/ Subtrakion:*
- *Skalare Multplikation:*
- *(Matrizen-) Multiplikation:*
  Hierzu verwenden wir die folgenden Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir wollen für die Multiplikation folgendes festhalten:

Beispiel 5.16. Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechne die folgenden Matrizen:

1. $A + B =$

2. $B - C =$

3. $A \cdot B =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad B \cdot A =$

4. $C \cdot D =$

Wir wollen weiter noch folgendes festhalten:

Bem.:

-
-
-

Algebra-Aufgaben: *Matrizenkalkül A*
(Zugehörige Lösungen)

5.8.3 Die Inverse einer Matrix

Wie im vorherigen Abschnitt schon angekündigt, benötigen wir für das Lösen eines Gleichungssystems mit Hilfe der Matrizenrechnung die sogenannte *Inverse*, welche wir wie folgt definieren:

Def.: B heisst eine **Inverse** zu $A \in M_n(\mathbb{R}) \;:\Leftrightarrow B \cdot A = \mathbb{I}_n$

Bem.:
-
-

Aufgaben 5.6. *Den Begriff der Inversen haben wir schon im Zusammenhang mit den* Gruppen *kennengelernt.*
Repetiere die notwendigen Begriffe in diesem Zusammenhang.

Aufgaben 5.7. *Beweise die folgenden Aussagen:*

1. *Wegen der Assoziativität gilt:*

$$A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}_n \;\Rightarrow A \;\cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n$$

2. *Die Inverse ist eindeutig bestimmt.*

Aufgaben 5.8. *Beweise auch die folgende Implikation:*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

und bestimme die Inversen zu folgenden Matrizen:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$$

5.8.4 Die Bestimmung der Inversen mit dem Gauβ-Algorithmus

Einige Vorbetrachtungen ...

Beispiel 5.17. Bestimmung der zugehörigen Inversen: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgaben 5.9. *Bestimme die zugehörigen Inversen und verifiziere Deine Ergebnisse:*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösg.: $B^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Aufgaben 5.10. *Wir betrachten die folgende Matrix:* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Bestimme die zugehörige Inverse

1. *mit Hilfe des Gauß-Algorithmus,*
2. *mit Hilfe des Produktes der für den Gauß-Algorithmus verwendeten Transformationsmatrizen.*

Noch drei letzte Bemerkungen zu den Inversen:

Bem.:

- Beh.: $(A^{-1})^{-1} = A$

  Beweis:

- Beh.: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

  Beweis:

- Für die Existenz von genau einer Lösung eines linearen Gleichungssystems ist ...

5.8.5 Die Determinante

Wie wir schon bemerkt haben, ist die *Determinante* bestimmend für die Anzahl Lösungen eines quadratischen linearen Gleichungssystems.

Die Determinante eines linearen (2×2) Gleichungssystems haben wir schon kennengelernt:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Die Determinante eines linearen (3×3) Gleichungssytems wird wie folgt berechnet:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Für die Berechnung der Determinanten von quadratischen Gleichungssytemen höherer Ordnung gibt es sog. *Entwicklungssätze*, welche wir, je nach Zeit und Interesse, auch kurz besprechen werden.
Wir werden uns im Folgenden mit den Eigenschaften von Determinanten befassen und diese soweit möglich zur Berechnung der Determinante von gut konditionierten Matrizen verwenden.

Wir müssen dafür den folgenden, sehr wichtigen Begriff der Mathematik einführen:

Def.: Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, mit $n, m \in \mathbb{N}$ heisst **linear** $:\Leftrightarrow$

(i) $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$

(ii) $f(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot f(\vec{a})$, $\quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$

Bem.:

-
-

Eine lineare Abbildung hat die folgenden Eigenschaften:

- Beh.: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist linear $\Rightarrow$ $f(\vec{0}) = \vec{0}$

  Beweis:

  Diese Aussage hat

  - in der *Gruppentheorie* eine ganz wichtige Bedeutung: (*Gruppenhomomorphismus*)

  - und führt auch dazu, dass die *"lineare"* Funktion $f(x) = ax + b$ nicht linear ist:

- Beh.: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist linear $\Leftrightarrow$ $f(\lambda\vec{a} + \vec{b}) = \lambda f(\vec{a}) + f(\vec{b})$

  Beweis:

Aufgaben 5.11. *Beweise, dass $f(x) = x^2 - 2x$ nicht linear ist.*

Beispiel 5.18. Beweise, dass die folgende Abbildung linear ist:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ , \ \text{mit} \ \ f(\vec{x}) := \begin{pmatrix} x \\ x - y \end{pmatrix} \ , \ \ \text{mit} \ \ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und bestimme die zugehörige Matrix A:

Bestimme weiter die zugehörige Inverse A^{-1} und verifiziere Deine Lösung:

Was gibt (ohne nachzurechnen!) $A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ x - y \end{pmatrix} = \ \ldots$?

Aufgaben 5.12. *Untersuche die folgenden Abbildungen auf Linearität und bestimme die zugehörige Matrix und Inverse:*

1. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, mit $g(\vec{x}) := \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$, mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

2. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, mit $h(\vec{x}) := \begin{pmatrix} x \\ 1+y \end{pmatrix}$, mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Eine Determinante hat wichtige Eigenschaften, welche in folgendem Satz zusammengefasst sind:

Satz: Die Determinante ist eine multilineare, alternierende und $\mathbb{R}$-wertige Funktion.

Beweis: -

Zur Bedeutung dieser Aussage:

- $\mathbb{R} - wertig$ heisst:

Für die weiteren Begriffe verwenden wir eine Kurzschreibweise für

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad =$$

- *alternierend* heisst:

- *multilinear* heisst:

5.8.6 Folgerungen aus der Multilinearität & Schiefsymmetrie

Beispiele zur Anwendung des Begriffs *alternierend*:

- $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
- $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}$
- $\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \ldots$ gemeinsam

Wir wollen die letzte Eigenschaft in folgendem Satz zusammenfassen:

Satz: Die Determinante einer Matrix mit zwei identischen Spalten verschwindet.

Beweis:

Beispiele zur Anwendung der *Multilinearität*:

- $\det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} = 5 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

- $\det\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

- $\det\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$

Wir wollen auch dieses mal die letzte Eigenschaft in einem Satz zusammenfassen:

Satz: Die Determinante einer Matrix, in welcher eine Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte ist, verschwindet.

Beweis:

Der vorherige Satz lässt sich noch zu folgender Aussage verallgemeinern:

Satz: Die Determinante einer Matrix, in welcher sich eine Spalte als eine Linearkombination der anderen Spalten darstellen lässt, verschwindet.

Formuliere ein eigenes Beispiel:

Beweis:

Ohne Beweis wollen wir noch die folgenden Eigenschaften festhalten:

Satz:

- Die Determinante einer Matrix in Dreiecksform ist gleich dem Produkt der Diagonalelemente:

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- $\det A = \det A^T$

5.8.7 Die Berechnung der Determinante mit Hilfe von Gauss

Wir haben dieses Kapitel mit dem Gauβ-Algorithmus begonnnen, und wollen ihn nun abschliessend auch zur Bestimmung der Determinante einer beliebigen Matrix verwenden.

Wir formulieren die Eigenschaften der Determinante in der transponierten Darstellung, also mit Zeilenvektoren:

und arbeiten folgendes Beispiel durch:

Beispiel 5.19. $\det A\ ,\quad \text{mit}\ \ A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

$$A' \quad = \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \\ \color{red}{0} & . & . \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

$$A'' \quad = \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ \color{red}{0} & . & . \\ 0 & . & . \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

$$A''' \quad = \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 0 & \color{red}{0} & . \\ 0 & . & . \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

$$A'''' \quad = \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 0 & . & . \\ 0 & . & . \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

Aufgaben 5.13. *Bestimme die Determinanten der folgenden Matrizen:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Zum Abschluss noch ein gemeinsames Beispiel:

Beispiel 5.20. Bestimme die Determinante der folgenden Matrix:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Algebra-Aufgaben: *Matrizenkalkül B*
(Zugehörige Lösungen)

5.8.8 Die Berechnung der Determinante mit Hilfe von Laplace

Eine weitere Methode zur Berechnung einer Determinante ist die sog. *Laplace-Entwicklung*, welche wir nur an folgendem Beispiel aufzeigen, ohne sie jedoch zu begründen oder zu beweisen:

Beispiel 5.21. $\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Aufgaben 5.14. *Verifiziere das Resultat mit Hilfe geschickter Umformungen unter Verwendung der Eigenschaften der Determinanten.*

5.8.9 Matrizen & Mathematica

Wir haben jetzt mehrfach festgestellt, dass das Rechnen mit Matrizen mit grossem (zeitlichen) Aufwand verbunden ist. Der lässt sich mit Hilfe von Mathematica stark verringern:

Hierzu folgende Unterlagen: Matrizenrechnung mit *Mathematica*

Das Durcharbeiten lohnt sich, da insbesondere in den folgenden Anwendungen mehrfach Matrizen multipliziert werden ...

5.9 Mehrstufige Prozesse

Mehrstufige Prozesse sind dadurch gekennzeichnet, dass eine durch einen *Zustandsvektor* beschriebene Startsituation Schritt für Schritt mit Hilfe von *Übergangsmatrizen* in Folgesituationen überführt wird. Dabei kann diese Überführung durch von Stufe zu Stufe verschiedene Matrizen (z.B. Materialverflechtungen) oder durch das mehrfache Anwenden ein und derselben Matrix erfolgen (z.B. Populationsentwicklungen).

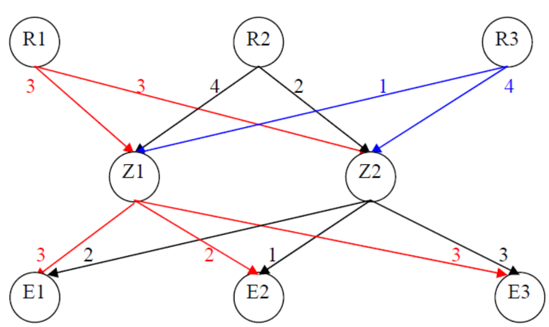
Als Quelle verwenden wir die Unterlagen von

J. Bemetz: *Materialen zu Mehrstufigen Prozesse*,
Martin-Heidegger-Gymnasium Meβkirch

Wir werden uns an den folgenden drei Beispielen mit der Thematik vertraut machen:

- *Materialverflechtung*

  In einem Produktionsprozess werden zur Herstellung von 2 Zwischenprodukten Z1 und Z2 drei verschiedene Rohstoffe R1, R2, und R3 benötigt. Aus den beiden Zwischenprodukten entstehen dann 3 verschiedene Endprodukte E1, E2 und E3.
  Der untenstehenden Figur kann entnommen werden, wieviel Mengeneinheiten der Rohstoffe für die jeweiligen Zwischenprodukte und wieviel Mengeneinheiten der Zwischenprodukte für die jeweiligen Endprodukte benötigt werden.
  Gesucht ist der Rohstoffbedarf für die verschiedenen Endprodukte.



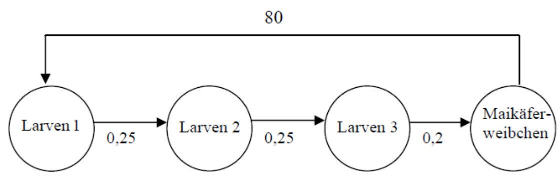
Diskussion der Lösung:

Alternativer Zugang:

Weitere Beispiele und Erklärungen sind zu finden unter
http://www.dieter-heidorn.de/ ...

- *Maikäferpopulation*

  Ein Maikäferweibchen legt 80 Eier und stirbt bald danach. Von den sich daraus entwickelnden Larven (Engerlinge) überleben nur ein Viertel das darauffolgende Jahr. Auch im zweiten Jahr überleben nur ein Viertel der Larven. Im dritten Jahre verpuppen sich die Larven und aus einem Fünftel von ihnen entwickeln sich im folgenden Jahr Maikäferweibchen, die wieder 80 Eier legen.

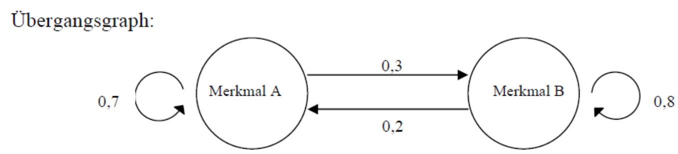
  

  Wir untersuchen die Entwicklung einer Startpopulation aus 6000 Larven 1, 2000 Larven 2, 300 Larven 3 und 500 Käfernweibchen.

Diskussion der Lösung:

- *Vererbung von Merkmalen*

  Eine Population von Insekten enthält Tiere mit zwei verschiedenen Merkmalen A und B (z.B. Farbe). Beobachtungen über längere Zeit zeigen, dass Insekten mit Merkmal A zu 70% Nachkommen mit Merkmal A und zu 30% solche mit Merkmal B haben. Insekten mit Merkmal B haben zu 80% wieder Nachkommen mit diesem Merkmal, zu 20% solche mit Merkmal A. Die Vermehrungsrate wird durch die Merkmale nicht beeinflusst.

  $x_A(0)$ sei der Anteil der Insekten mit Merkmal A zu Beobachtungsbeginn, $x_B(0)$ entsprechend derjenige mit Merkmal B.

Diskussion der Lösung:

Algebra-Aufgaben: *Matrizenkalkül C*
(Zugehörige Lösungen)

Algebra-Aufgaben: *Matrizenkalkül D*
(Zugehörige Lösungen)

- *Kosten & Gewinne* - eine Abituraufgaben

Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3 und R_4 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und Z_4 her und aus diesen die Endprodukte E_1, E_2 und E_3.
Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist folgenden Tabellen zu entnehmen.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
R_1	a	b	0	0
R_2	0	c	d	0
R_3	0	0	e	0
R_4	0	0	f	g

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	0	0
Z_2	1	4	0
Z_3	0	3	1
Z_4	1	0	2

	E_1	E_2	E_3
R_1	5	12	0
R_2	2	11	1
R_3	0	12	4
R_4	2	3	5

a) Geben Sie die zugehörigen Matrizen A_{RZ}, A_{ZE} und A_{RE}.
Berechnen Sie die fehlenden Werte der Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix.

b) Wegen eines Umbaus soll das Rohstofflager weitgehend geräumt werden. Dabei sollen zwei Bedingungen erfüllt werden:
i) Die Lagerbestände von R_2 und R_3 sollen vollständig aufgebraucht werden.
ii) Von R_1 und R_4 soll gleich viel übrig bleiben.
Der Lagerbestand beträgt 1 000 ME von R_1, 720 ME von R_2, 960 ME von R_3 und 1 000 ME von R_4.
Untersuchen Sie, ob die beiden obigen Bedingungen erfüllt sind, wenn 80 ME von E_1, 40 ME von E_2 und 120 ME von E_3 produziert werden.

c) Der Betrieb erhält einen Auftrag über 200 ME von E_1. Bestimmen Sie die Gesamtkosten für diesen Auftrag, wenn folgendes gilt:
i) Die Rohstoffkosten in GE pro ME betragen: 1 für R_1, 3 für R_2, 4 für R_3 und 2 für R_4.
ii) Die Fertigungskosten in GE je ME eines Zwischenprodukts betragen:
1 für Z_1, 1 für Z_2, 3 für Z_3 und 4 für Z_4.
iii) Die Fertigungskosten je ME des Endproduktes E_1 betragen 2 GE.
iv) Die Fixkosten betragen 400 GE.

d) Durch eine Änderung im Produktionsablauf werden die Fertigungskosten für die Zwischenprodukte und für die Endprodukte voneinander abhängig. Mit der Einschränkung: $0 < x < 2$ gilt:

Kosten	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
GE/ME	$2-x$	$2-x$	$4-x$	$5-x$

Kosten	E_1	E_2	E_3
GE/ME	$3-x$	$4-x$	$5-x$

Es werden 200 ME von E_1, 100 ME von E_2 und 300 ME von E_3 bestellt.
Ermitteln Sie unter der Voraussetzung, dass sich die Rohstoffkosten [Teil c) i)] nicht ändern und die Fixkosten 1000GE betragen, den Wert für x, für den die Gesamtkosten für diesen Auftrag 32.000 GE betragen.

e) Die Endprodukte können nach einer weiteren Umstellung aus produktionsspezifischen Gründen nur im Verhältnis $E_1 : E_2 : E_3 = 2 : 1 : 3$ produziert werden.
Eine Produktion besteht demnach aus $2t$ ME von E_1, t ME von E_2 und $3t$ ME von E_3, mit ($100 < t < 1.200$). Die Fixkosten betragen 4000 GE pro Produktion.
Für die Herstellungskosten der Endprodukte bzw. die Verkaufspreise der Endprodukte gilt:

Kosten	E_1	E_2	E_3
GE/ME	$29 - 0{,}5\ln(t)$	$130 - 2\ln(t)$	$54 - 1{,}5\ln(t)$

Preis	E_1	E_2	E_3
GE/ME	$42 - 2\ln(t)$	$145 - 4\ln(t)$	$65 - 3\ln(t)$

Bestimmen Sie den Wert für t, für den der Gewinn $G(t)$ maximal wird, wenn die gesamte Produktion verkauft wird.

Der Link zur Aufgabe mit Lösungen: auf *DOCPLAYER.org* ...

5.10 *Meine* Zusammenfassung