Lineare Gleichungssysteme

ALGEBRA - Kapitel 5

SprachProfil - Gymnasiale Mittelstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

7. Mai 2023

Die *QR* - Codes
zu den
Linearen
Gleichungssysteme
NProfil

zum aktuellen Skript

zur Homepage

zur Übersicht *Algebra*

zu den Lin Gleichungssysteme

zu den Aufgaben & Lösungen

Überblick über die bisherigen *ALGEBRA* - Themen:
(in den MNProfil-Versionen)

Zur **Faktorzerlegung von Polynomen 2. Grades** -
eine Trilogie von **Lernaufgaben** *in vier Teilen*

Sie deckt die Kapitel 2.3 und 2.4 (ohne den Divisionsalgorithmus) ab.

Inhaltsverzeichnis

5 Lineare Gleichungssysteme

5.1 Überblick

Wir beginnen mit der Repetition der Lösungsmethoden von linearen 2×2 Gleichungssystemen und werden mit Hilfe der geometrischen Interpretation deren *Lösbarkeitsbedingungen* diskutieren. Neu werden wir, als Egänzung zu den schon bekannten Verfahren des *Gleichsetzens* und *Einsetzens*, das *Gauß'sche Eliminationsverfahren* kennenlernen, welches vor allem bei *lineare* $n \times m$ *Gleichungssytemen*, mit $n, m \geq 3$ zur Anwendung kommt.
Die Einführung von *Parametern* in die Gleichungssyteme ermöglicht uns ein weiters mal eine Diskussion der Lösbarkeitsbedingungen.
Wir schliessen dieses Kapitel mit einigen Beispielen zu *Textaufgaben*.

Begleitend wird die Aufgabensammlung von

Deller/Gebauer/Zinn: *Algebra 1*, Verlag OrellFüssli

verwendet.

5.2 Lineare 2×2 Gleichungssysteme

Was ist ein lineares 2×2 Gleichungssystem ?

$$\begin{array}{lrcl} \text{(I)} & ax + by & = & e \\ \text{(II)} & cx + dy & = & f \end{array}$$

<u>*Bem.:*</u>

-
-
-

Wenn wir die Gleichungen (I) und (II) nach y auflösen, ermöglicht uns diese *äquivalente* Darstellung eine geometrische Interpretation:

$$\text{(I)} \qquad ax + by = e \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x + \frac{e}{b}$$

ist ...

mit ...

und hat als Lösungsmenge ...

$$\text{(II)} \qquad cx + dy = f \quad \Leftrightarrow \quad y =$$

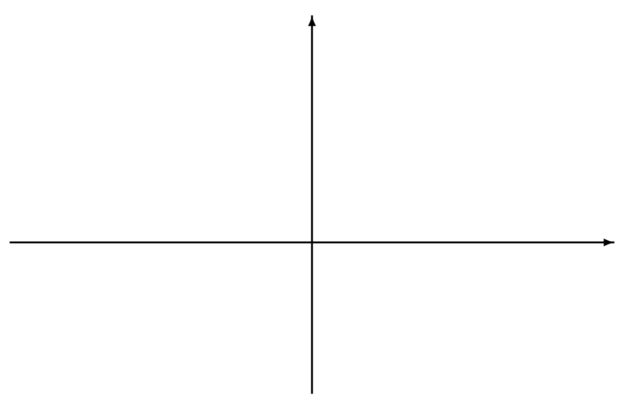
ist ...

mit ...

und hat als Lösungsmenge ...

Die *Lösungsmenge des Gleichungssystems* ist nun die Menge aller Elemente (in diesem Fall also die Menge aller Punkte (x/y)), welche die Gleichung (I) *und* die Gleichung (II) erfüllen.

Graphische Interpretation



Aus der graphischen Darstellung lassen sich sofort die *Lösbarkeitsbedingungen* für ein lineares 2×2 Gleichungssytem ableiten:

- Es existiert genau eine Lösung $\Leftrightarrow$

- Es existiert keine Lösung $\Leftrightarrow$

- Es existieren genau zwei Lösungen $\Leftrightarrow$

- Es existieren genau drei Lösungen $\Leftrightarrow$

$\vdots$

- Es existieren unendlich viele Lösungen $\Leftrightarrow$

Entscheidend für die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrcl} \text{(I)} & ax + by & = & e \\ \text{(II)} & cx + dy & = & f \end{array}$$

ist somit folgender Ausdruck:

Beispiel 5.1. Bestimme die Lösungen nur in den Fällen, wo sie existiert und eindeutig bestimmt ist:

$$\begin{aligned} -2x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 - y &= 3x \\ 3y + 9x &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ -9y + 6x &= 12 \end{aligned}$$

Aufg.: 5 - 16 ; 5, 11a, 12b, 14, 15b, 16a

5.3 Das Gauβ'sche Eliminationsverfahren

Wir werden im Folgenden ein neues Lösungsverfahren kennenlernen,

> das *Gauss'sche Eliminations-* oder *Additionsverfahren*,

welches uns auf einfache Art und Weise auch das Lösungen linearer Gleichungssysteme höheren Grades erlaubt.

Beginnen werden wir mit einer kurzen Repetition uns schon bekannter Methoden zum Lösen linearer 2×2 Gleichungssyteme:

Beispiel 5.2. Löse das folgende Gleichungssytem auf verschiedene Wege:

- $$\begin{array}{rcrcr} 5x & - & y & = & 7 \\ 4x & + & y & = & 7 \end{array}$$

- $$\begin{array}{rcrcr} 5x & - & y & = & 7 \\ 4x & + & y & = & 7 \end{array}$$

- $$\begin{array}{rcrcr} 5x & - & y & = & 7 \\ 4x & + & y & = & 7 \end{array}$$

Aufg.: 17 - 52 ; ...

5.3.1 ***Nicht-lineare* Gleichungssysteme**

Wir schliessen den Repetitionsteil mit drei *nicht-linearen* 2×2 - Gleichungssysteme, welche sich auf *lineare* Gleichungssysteme zurückführen lassen:

Beispiel 5.3. Bestimme jeweils die Lösungen der folgenden 2×2 - Gleichungssystemen:

- $$\begin{array}{rcrcr} 1:(y+1) & + & 1:(y-1) & = & (10-x):(y^2-1) \\ 1:(x-2) & + & 3:(y-4) & = & 5:(2-x) \end{array}$$

- $$\begin{aligned} \frac{8}{x-y} \quad - \quad \frac{9}{x+y} \quad &= \quad \frac{11}{15} \\ \frac{6}{x-y} \quad - \quad \frac{5}{x+y} \quad &= \quad \frac{2}{3} \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 3x^{-2} \quad - \quad 7y^{-2} \quad &= \quad 5 \\ 5x^{-2} \quad + \quad 3y^{-2} \quad &= \quad 12 \end{aligned}$$

Aufg.: 75 - 86 ; 76b, 77b, 81a, 82b, 85a

Wir kommen nun endlich zum Gauβ' schen Eliminationsverfahren.
Das Lösungsverfahren nach Gauβ baut auf den uns schon bekannten *Äquivalenzumforungen* auf, welche sind

-
-

Wir werden das folgende Beispiel mit Hilfe des *Gauβ-Verfahren* lösen um anschliessend den zugehörigen *Algorithmus* zu formulieren:

Beispiel 5.4. Löse das folgende lineare 3×3 Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

1. mit dem Gleichsetzungsverfahren:

2. mit dem Einsetzungsverfahren:

3. mit dem Gauβverfahren:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

Die Idee des Gauβ-Algorithums:

5.4 Lineare $n \times n$ Gleichungssysteme

Wir sprechen von einem *linearen (quadratischen) $n \times n$ Gleichungssystem*, wenn ...

Beispiel 5.5. Wir werden die folgenden Gleichungssyteme gemeinsam lösen und mögliche Vereinfachungen in den Darstellungen besprechen:

1. $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 10 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & 4 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 7y & = & 10 \\ 3x & + & 8z & = & 13 \\ y & + & 5z & = & 12 \end{array}$$

Aufgaben 5.1. *Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:*

1. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -2 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 3 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 1 \\ 2y & - & z & = & 0 \\ -8y & + & 4z & = & 0 \end{array}$$

3.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3z - 1 \\ 3x - y &= -2z + 7 \\ 4z + 2 &= 5x + 3y \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}
2x+3y-z &= 2t-1\\
2t+y &= 2x+2s\\
x+y+z+s+t &= 3\\
3+2s+t &= 8x+2y+z\\
x-z+s &= t+1
\end{aligned}$$

Aufg.: 133-147, 159 ; . . .

5.5 Lineare $m \times n$ Gleichungssysteme

Wir sprechen von einem *linearen $m \times n$ Gleichungssystem*, wenn ...

Aufgaben 5.2. *Gib ein Beispiel eines linearen 4×3 Gleichungssystems an und löse es mit Hilfe des Gauß-Verfahren:*

Aufgaben 5.3. *Gib ein Beispiel eines linearen 3×5 Gleichungssystems an und löse es mit Hilfe des Gauß-Verfahren:*

Aufg.: 153 - 155 ; ...

Zusammenfassung der *Interpretationsmöglichkeiten der letzten Zeile*:

5.6 Lineare Gleichungssysteme mit Parametern

Neben den Variablen lassen sich in einem Gleichungssytem auch *Parameter* einführen. Die Lösungsmethoden bleiben die gleichen, nur die Fragestellungen lassen sich interessanter gestalten:

Beispiel 5.6. Bestimme **k** so, dass das folgende Gleichungssystem

1. genau eine Lösung,
2. keine Lösung,
3. unendlich viele Lösungen

hat:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & \mathbf{k}z & = & 4 \\ 5x & + & 6y & - & 7z & = & 8 \\ 9x & - & 10y & - & 11z & = & 12 \end{array}$$

Aufgaben 5.4. *Diskutiere vollständig das folgende Gleichungssystem:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & \alpha x_2 & - & x_3 & = & \beta \end{array}$$

Aufg.: 70, 71, 73, 160 ; ...

5.6.1 Weitere Aufgaben zur Diskussion...

1. Welche der folgenden Gleichungssysteme haben keine, genau eine oder unendliche viele Lösungen?

   (a) $\begin{array}{rcrcr} -5x & + & 3y & = & 12 \\ 4x & - & y & = & 2 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 1 \\ x & + & y & = & -1 \end{array}$

   (c) $\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 4 \\ \frac{1}{2}x & - & \frac{1}{3}y & = & \frac{1}{4} \end{array}$ (d) $\begin{array}{rcrcr} 372x & - & 12y & = & 0 \\ -31x & + & y & = & 0 \end{array}$

   (e) $\begin{array}{rcrcr} 372x & - & 12y & = & 3 \\ -31x & + & y & = & -\frac{1}{4} \end{array}$ (f) $\begin{array}{rcrcr} 372x & - & 12y & = & -4 \\ -31x & + & y & = & \frac{1}{3} \end{array}$

2. Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:

   (a) $\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2w & = & 4 \\ 3x & + & 3y & + & 3z & - & 3w & = & 5 \end{array}$

   (b) $\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & + & 3w & = & 2 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & + & 4w & = & 5 \\ 5x & + & 10y & - & 8z & + & 11w & = & 12 \end{array}$

   (c) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ x & + & 3y & + & z & = & 11 \\ 2x & + & 5y & - & 4z & = & 13 \\ 2x & + & 6y & + & 2z & = & 22 \end{array}$

   (d) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \end{array}$

   (e) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 5x & + & 3y & - & 4z & = & 2 \end{array}$

3. Bestimme $\mathbf{p}$, so dass genau eine Lösung existiert.

(a) $\begin{array}{rcrcl} \mathbf{p}x & + & y & = & 2 \\ 2x & - & 3y & = & 1 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 3\mathbf{p}y & = & 7 \\ x & + & 2y & = & 4 \end{array}$

(c) $\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 1 \\ \mathbf{p}x & - & \mathbf{p}^2y & = & 2 \end{array}$ (d) $\begin{array}{rcrcl} 5x & - & 3y & = & 0 \\ \mathbf{p}x & + & 4y & = & 1 \end{array}$

(e) $\begin{array}{rcrcl} 5x & - & 3y & = & -1 \\ \mathbf{p}x & + & 4y & = & 0 \end{array}$ (f) $\begin{array}{rcrcl} 5x & - & 3y & = & \mathbf{p}^2 \\ \mathbf{p}x & + & 4y & = & 0 \end{array}$

4. Die folgenden Gleichungssysteme sind vollständig zu diskutieren:
(d.h.: Bestimme die Bedingungen, unter welchen das Gleichungssystem keine, genau ein oder unendliche viele Lösungen hat und gib jeweils die Lösungen explizit an.)

(a) $\begin{array}{rcrcl} 3x & + & y & = & 1 \\ 2y & - & z & = & 0 \\ -8y & + & pz & = & 0 \end{array}$

(b) $\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & (r+1)y & - & \frac{p}{2}z & = & 2 \\ 6x & + & 2ry & & & = & 4 \\ -3x & + & (1-r)y & + & (q+\frac{p}{2})z & = & 0 \end{array}$

5. Was für Bedingungen müssen die Parameter $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ erfüllen, damit das folgende Gleichungssystem eine Lösung hat ?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & \mathbf{a} \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & \mathbf{b} \\ x & - & 2y & + & 7z & = & \mathbf{c} \end{array}$$

6. Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:

(a) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -4 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -2 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 3 \end{array}$

(c) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -4 \\ 2x & - & y & + & z & = & -1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array}$ (d) $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 12 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 11 \end{array}$

7. Welche der folgenden Gleichungssysteme haben genau eine Lösung:

(a)
$$\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 4y & = & 12 \\ -4x & - & 3y & = & 21 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 4y & = & 56 \\ -4x & - & 3y & = & 31 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 4y & = & 66785 \\ -4x & - & 3y & = & 0 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2x & - & 8z & = & 0 \\ 12x & + & 6x & + & 12z & = & 1 \\ & & -3x & + & 7z & = & 1 \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5a & + & 3b & - & 4c & + & 8d & = & 1 \\ 3a & + & b & - & 2c & + & 6d & = & -1 \\ -11a & + & 22b & + & 3c & - & 4d & = & 2 \end{array}$$

(f)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} a & + & 2b & - & 4c & + & 4d & + & e & = & 1 \\ -a & + & 4b & + & 3c & - & 5d & + & 2e & = & 8 \\ -2a & - & 4b & + & 8c & - & 8d & - & 2e & = & -2 \\ 3a & + & 4b & + & 2c & - & d & - & e & = & 0 \\ a & - & b & + & c & - & d & + & e & = & 2 \end{array}$$

Ausführliche Lösungen zu den Diskussionen der Aufgaben 4. & 5. sind zu finden unter ML-TheorieAufgaben

Lösungen :

1. (a) $\det = (-5)\cdot(-1) - 3\cdot 4 = -7 \neq 0 \Rightarrow \exists!$ Lösung.
   (b) $\det = \ldots = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists!$ Lösung.
   (c) $\det \neq 0 \Rightarrow \exists!$ Lösung.
   (d) $\det = 0 \Rightarrow$ Spezialfall: ed $= 0 =$ bf $\Rightarrow \infty$ - viele Lösungen.
   (e) $\det = 0 \Rightarrow$ Spezialfall: ed $= 3 =$ bf $\Rightarrow \infty$ - viele Lösungen.
   (f) $\det = 0 \Rightarrow$ Spezialfall: ed $= 4 =$ bf $\Rightarrow \infty$ - viele Lösungen.

2. (a) $\nexists$ Lösung.
   (b) $\mathrm{S} = (x/y/z/w) = (4 - 2y + w/y/1 + 2w/w),\ y, w \in \mathbb{R}$
   (c) $\mathrm{S} = (x/y/z) = (1/3/1)$
   (d) $\mathrm{S} = (x/y/z) = (\frac{2}{5}z/\frac{3}{5}z/z),\ z \in \mathbb{R}$
   (e) $\nexists$ Lösung.

3. (a) $\mathbf{p} \neq -\frac{2}{3}$
   (b) $\mathbf{p} \neq -\frac{4}{3}$
   (c) $\mathbf{p} \neq -1 \wedge \mathbf{p} \neq 0$
   (d) = (e) = (f) $\mathbf{p} \neq -\frac{20}{3}$

4. (a)
   - für $p \neq 4$ $\exists!$ Lösung: $\mathrm{S} = (x/y/z) = (\frac{1}{3}/0/0)$
   - für $p = 4$ $\exists\infty$ Lösungen: $\mathrm{S} = (x/y/z) = (\frac{1-\frac{z}{2}}{3}/\frac{z}{2}/z),\ z \in \mathbb{R}$
   - der Fall, dass *keine* Lösung existiert, tritt nie ein.

   (b)
   - für $p + q \neq 0$ $\exists!$Lösung: $\mathrm{S} = (x/y/z) = (\frac{2}{3} - \frac{rp}{3(p+q)}/\frac{p}{p+q}/\frac{2}{p+q})$
   - für $p + q = 0$ $\nexists$ Lösung.
   - der Fall, dass ∞ viele Lösungen existieren, tritt nie ein.

5. $-5a + 2b + c = 0$

6. Für alle Lösungen gilt: $\mathrm{S} = (x/y/z)$
   (a) S = (1.9/-0.7/-1.5)
   (b) S = (0/-1/0)
   (c) S = (-0.7/-0.9/-0.5)
   (d) S = (5/-2/0)

7. (a), (b), (c), (d)

5.7 Textaufgaben

Für das Lösen von Textaufgaben mit mehreren Unbekannten gehen wir zur Erstellung der Lösungsgleichung analog zum Verfahren vor, welches wir schon im Kapitel 3 *Gleichungslehre* kennen gelernt haben ...

-
-
-
-

und können für das Lösen gegebenenfalls das *Gauß' sche Eliminationsverfahren* anwenden.

Beispiel 5.7. Willi und Fritz sind zwei Brüder. Vor 4 Jahren war Willi 4mal so alt wie Fritz und in 2 Jahren wird er noch doppelt so alt sein.
Wie alt sind die Brüder heute?

Beispiel 5.8. Eine dreistellige Zahl, deren Wert bei der Vertauschung der beiden ersten Ziffern nicht ändert, hat die Quersumme 15. Werden die letzten beiden Ziffern vertauscht, so nimmt der Wert der Zahl um 27 zu.
Wie lautet die Zahl?

Aufg.: 163 - 165 ; . . .

Beispiel 5.9. Bestimme die Parameter a, b und c so, dass die Gleichung

$$z = ax + by + c$$

die folgenden Lösungen hat:

$$(9/8/5), (-4/-4/-1), (6/5/2)$$

<u>*Aufg.:*</u> 167, 168 ; ...

5.7.1 Mischaufgaben

Nicht vergessen: Die Möglichkeit der Anwendung des Prinzips der *Drei-* bzw. *Zweisätzen*:

Beispiel 5.10. Wir betrachten 5kg einer 4%igen Sole, d.h.:

1. Mit wieviel kg Wasser muss die Sole ergänzt werden, damit der Salzgehalt auf 3% sinkt?

2. Wieviel kg Salz muss der verdünnten Lösung beigegeben werden, damit der Salzgehalt wieder bei 4% liegt?

3. Wieviel kg einer 1%igen Sole müssen nun zugeführt werden, um eine 2%ige Salzlösung zu erhalten?

Aufgaben 5.5. *Wir gehen von 10kg einer 3%igen Sole aus.*

1. *Wieviel kg Wasser sind in der Sole enthalten ?*

2. *Wie gross ist der Salzanteil (in %) wenn der* ursprünglichen *Sole*

   (a) *. . . 2.5 kg Wasser zugeführt werden.*

   (b) *. . . 15g Salz zugeführt werden.*

   (c) *. . . 1 kg Wasser entzogen werden.*

   (d) *. . . 12g Salz entzogen werden.*

   (e) *. . . 2kg einer 4%igen Sole zugeführt werden.*

5.7.2 Leistungsaufgaben

Wir wollen uns mit den folgenden Fragen an das Lösungsverfahren von *Leistungsaufgaben* heranarbeiten und gehen von folgender Situation aus:

- Ein Behälter hat zwei Zuleitungen A und B.
  Die Leitung A füllt den Behälter in 3 Stunden, die Leitung B in 10 Stunden.

  - Wie weit füllt sich der Behälter, wenn beide Leitungen 1 Stunde geöffnet sind ?

  - Wie weit füllt sich der Behälter, wenn beide Leitungen 2 Stunden geöffnet sind ?

  - Wie lange müssen beide Leitungen gleichzeitig geöffnet bleiben, um den Behälter ganz zu füllen?

  - Die Leitung A wird nach 2 Stunden geschlossen und dafür B geöffnet. Wie lange muss B geöffnet bleiben um den Behälter zu füllen ?

  - Nachdem B schon eine 1/2 Stunde läuft, wird die Leitung A noch zugeschaltet.
    Wie lange dauert es noch, bis der Behälter zur Hälfte gefüllt ist ?

- Ein Behälter hat dieses mal drei Zuleitungen, wobei die Leitung A den Behälter in 3 Stunden zur Hälfte, die Leitung B den Behälter in 4 Stunden ganz und die Leitung C den Behälter in 2 Stunden zu einem Viertel füllt.

    - Wie weit füllt sich der Behälter, wenn alle drei Leitungen während einer Stunde geöffnet sind ?

    - Wie lange müssen alle drei Leitungen gleichzeitig geöffnet bleiben, um den Behälter ganz zu füllen ?

    - Die Leitung A wird nach einer 1/2 Stunde geschlossen, anschliessend wird die Leitung B für nur 1 Stunde geöffnet.
      Wie lange muss die Leitung C jetzt noch geöffnet werden, um den Behälter ganz zu füllen ?

    - Nachdem die Leitung A schon während einer 1/2 Stunde läuft, wird die Leitung B zugeschaltet. Nach einer weiteren Stunde wird noch die Leitung C geöffnet.
      Wie lange sind die drei Leitungen gleichzeitig geöffnet, um den Behälter ganz zu füllen ?

Beispiel 5.11. Ein Wasserbehälter kann durch die drei Zuleitungen A, B und C gefüllt werden, und zwar durch A und B in c Minuten, durch A und C in b Minuten und durch B und C in a Minuten.

In wieviel Minuten kann der Behälter durch jede Leitung einzeln gefüllt werden?

In wieviel Minuten kann der Behälter durch alle drei Leitungen gemeinsam gefüllt werden?

Aufg.: 170

5.8 *Meine* Zusammenfassung