Matrizenrechnung

ALGEBRA - Kapitel 5b

WR-Profil - gymnasiale Mittelstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

23. Mai 2021

Überblick über die bisherigen *ALGEBRA* - Themen:

Inhaltsverzeichnis

5.9 Matrizenkalkül

In unseren vereinfachten Darstellungen der lineraren Gleichungssysteme durch die *Koeffizientenmatrizen* ist der Begriff, welcher wir in diesem Abschnitt einführen und besprechen wollen, schon gefallen:

Der Begriff der **Matrix**

Wir werden im Folgenden das *Rechnen mit Matrizen* einführen und dies in *Zusammenhang mit den linearen Gleichungssystemen* bringen.
In den Anwendungen werden wir uns mit *mehrstufigen Prozessen* beschäftigen.

5.9.1 Definitionen & Begriffe

Def.: Eine rechteckige Anordnung von skalaren Grössen (aus $\mathbb{R}$) der folgenden Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heisst eine **$(m \times n)$ - Matrix** mit m *Zeilen* und n *Spalten*, mit $m, n \in \mathbb{N}$

Bem.:

- a_{ij} heisst ...

  und steht ...

- $M(m \times n, \mathbb{R}) :=$
- $M_n(\mathbb{Z}) :=$

Beispiel 5.1 *Wir betrachten die folgende Matrix:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & 7 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

- A *ist eine* $(\ldots \times \ldots)$*-Matrix.*
- $a_{11} = \ldots$, $a_{22} = \ldots$, $a_{52} = \ldots$, $a_{42} = \ldots$, $a_{25} = \ldots$
- *2te Zeile =*
- *3te Spalte =*

Beispiel 5.2 *Die Koeffizienten der Matrix* $A \in M_6(\mathbb{R})$ *sind wie folgt definiert:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \forall j \geq i \\ 0 & , \forall j = 1 \wedge i > 2 \\ 2 & , \forall i = j + 2 \wedge j > 1 \\ -1 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Konstruiere A.

Beispiel 5.3 *Gib jeweils ein Beispiel an, einer*

1. (1×5) *- Matrix:*
2. (3×1) *- Matrix:*
3. (1×1) *- Matrix:*

5.9.2 Rechenoperationen & der Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen

Mit Hilfe der *Matrizenmultiplikation* wollen wir erreichen, dass sich jedes lineare $m \times n$ Gleichungssytem in der folgenden Form darstellen lässt:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

mit $A =$

$\vec{x} =$

$\vec{b} =$

und wir das Gleichungssystem lösen können, in dem wir

- die zugehörige *augmentierte Matrix* mit Hilfe des Gauβ-Verfahren in Dreiecksform bringen und die Lösungsvariablen durch Rückwärtseinsetzen bestimmen

  oder

- mit Hilfe der *Inversen* der Koeffizientenmatrix (falls existent) und den Regeln der Matrizenrechnung arbeiten:

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \\ A^{-1} \cdot A\vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \\ \mathbb{I}_n \cdot \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \\ \vec{x} &= A^{-1} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Beispiel 5.4 *Zerlege das folgende Gleichungssytem in $A, \vec{x}$ und $\vec{b}$:*

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 2x & = & 4 & - & 3y & + & 8z \\ 2y & + & 3x & = & 1 \end{array}$$

Auf alle Fälle müssen wir zuerst die *Rechenoperationen mit Matrizen* definieren, welche uns überhaupt erlauben, unsere Gleichungssyteme in der Matrizenschreibweise darzustellen.

<u>Def.:</u> Seien $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}),\ C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{R}$
Dann definieren wir:

- Die Addition/ Subtraktion:

$$C = A \pm B, \quad \text{mit } c_{ij} := a_{ij} \pm b_{ij}$$

- Die skalare Multiplikation:

$$C = k \cdot A, \quad \text{mit } c_{ij} := k \cdot a_{ij}$$

- Die Matrizenmultiplikation:

$$C = A \cdot B, \quad \text{mit } c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Beispiel 5.5 *Gegeben sind die folgenden Grössen:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ k = -1$$

Berechne

1. $A + B$

2. $k \cdot B$

3. $A \cdot B$

Bem.: • Erkläre die Äquivalenz zwischen einem linearen $(m \times n)$-Gleichungssystem und der Gleichung $A\vec{x} = \vec{b}$

Wir betrachten nun noch die Verknüpfungen von Matrizen beliebiger Form:

- *Addition/ Subtrakion:*

- *Skalare Multplikation:*

- *(Matrizen-) Multiplikation:*
  Hierzu verwenden wir die folgenden Beispiele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir wollen für die Multiplikation folgendes festhalten:

Beispiel 5.6 *Wir betrachten die folgenden Matrizen:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechne die folgenden Matrizen:

1. $A + B =$

2. $B - C =$

3. $A \cdot B =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $B \cdot A =$

4. $C \cdot D =$

Wir wollen weiter noch folgendes festhalten:

<u>*Bem.:*</u>

-
-
-

Algebra-Aufgaben: *Matrizenkalkül A*
(Zugehörige Lösungen)

5.9.3 Die Determinante

Wie wir schon bemerkt haben, ist die *Determinante* bestimmend für die Anzahl Lösungen eines quadratischen linearen Gleichungssystems.

Die Determinante eines linearen (2×2) Gleichungssystems haben wir schon kennengelernt:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Die Determinante eines linearen (3×3) Gleichungssytems wird wie folgt berechnet:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Für die Berechnung der Determinanten von quadratischen Gleichungssytemen höherer Ordnung gibt es sog. *Entwicklungssätze* oder auch die Möglichkeit, diese über die Eigenschaften der Determinantenfunktion und mit Hilfe des Gauβ-Algorithmus zu berechnen ... wir werden auf elektronoische Hilfe zurückgreifen:

https://matrixcalc.org/

5.10 Mehrstufige Prozesse

Mehrstufige Prozesse sind dadurch gekennzeichnet, dass eine durch einen *Zustandsvektor* beschriebene Startsituation Schritt für Schritt mit Hilfe von *Übergangsmatrizen* in Folgesituationen überführt wird. Dabei kann diese Überführung durch von Stufe zu Stufe verschiedene Matrizen (z.B. Materialverflechtungen) oder durch das mehrfache Anwenden ein und derselben Matrix erfolgen (z.B. Populationsentwicklungen).

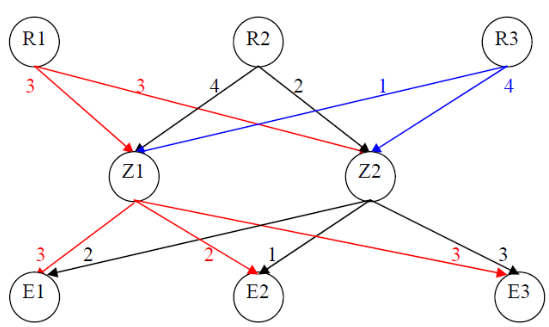
Als Quelle verwenden wir die Unterlagen von

J. Bemetz: *Materialen zu Mehrstufigen Prozesse*,
Martin-Heidegger-Gymnasium Meβkirch

Wir werden uns an den folgenden drei Beispielen mit der Thematik vertraut machen:

- *Materialverflechtung*

  In einem Produktionsprozess werden zur Herstellung von 2 Zwischenprodukten Z1 und Z2 drei verschiedene Rohstoffe R1, R2, und R3 benötigt. Aus den beiden Zwischenprodukten entstehen dann 3 verschiedene Endprodukte E1, E2 und E3.
  Der untenstehenden Figur kann entnommen werden, wieviel Mengeneinheiten der Rohstoffe für die jeweiligen Zwischenprodukte und wieviel Mengeneinheiten der Zwischenprodukte für die jeweiligen Endprodukte benötigt werden.
  Gesucht ist der Rohstoffbedarf für die verschiedenen Endprodukte.



Diskussion der Lösung:

Alternativer Zugang:

Weitere Beispiele und Erklärungen sind zu finden unter
http://www.dieter-heidorn.de/ ...

- Weitere Beispiele:

  1. *Eine Zweistufige Produktion*

     unter docplayer.com/ ...

  2. *Medikamentenherstellung*

     unter docplayer.com/ ...

  3. *Kosten & Gewinne* - eine Abituraufgabe

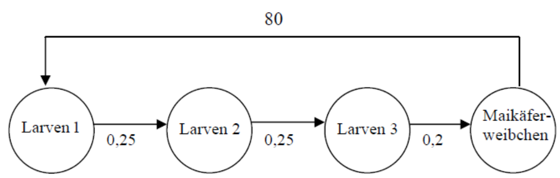
     unter docplayer.com/ ...

  4. *Aufgaben B0513* ohne Aufgabe f)

     unter docplayer.com/ ...

- *Maikäferpopulation*

  Ein Maikäferweibchen legt 80 Eier und stirbt bald danach. Von den sich daraus entwickelnden Larven (Engerlinge) überleben nur ein Viertel das darauffolgende Jahr. Auch im zweiten Jahr überleben nur ein Viertel der Larven. Im dritten Jahre verpuppen sich die Larven und aus einem Fünftel von ihnen entwickeln sich im folgenden Jahr Maikäferweibchen, die wieder 80 Eier legen.

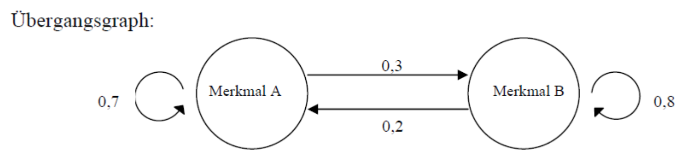
  

  Wir untersuchen die Entwicklung einer Startpopulation aus 6000 Larven 1, 2000 Larven 2, 300 Larven 3 und 500 Käfernweibchen.

Diskussion der Lösung:

- *Vererbung von Merkmalen*

  Eine Population von Insekten enthält Tiere mit zwei verschiedenen Merkmalen A und B (z.B. Farbe). Beobachtungen über längere Zeit zeigen, dass Insekten mit Merkmal A zu 70% Nachkommen mit Merkmal A und zu 30% solche mit Merkmal B haben. Insekten mit Merkmal B haben zu 80% wieder Nachkommen mit diesem Merkmal, zu 20% solche mit Merkmal A. Die Vermehrungsrate wird durch die Merkmale nicht beeinflusst.

  $x_A(0)$ sei der Anteil der Insekten mit Merkmal A zu Beobachtungsbeginn, $x_B(0)$ entsprechend derjenige mit Merkmal B.

Diskussion der Lösung:

Algebra-Aufgaben: *Matrizenkalkül C*
(Zugehörige Lösungen)

Algebra-Aufgaben: *Matrizenkalkül D*
(Zugehörige Lösungen)

5.11 *Meine* Zusammenfassung