

Lineare Gleichungssysteme

ALGEBRA - Kapitel 5

WRprofil - gymnasiale Mittelstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

28. Februar 2021

Überblick über die bisherigen *ALGEBRA* - Themen:

1 Mengenlehre

- 1.1 Die Menge im mathematischen Sinne
- 1.2 Darstellungsformen
- 1.3 Teilmengen
- 1.4 Rechnen mit Mengen
- 1.5 Mengen im Koordinatensystem
- 1.6 Rechnen in Mengen

2 Termumformungen

- 2.1 Grundbegriffe
- 2.2 Einfache Termumformungen
- 2.3 Das Rechnen mit Polynomen
- 2.4 Das Rechnen mit Brüchen

3 Gleichungslehre

- 3.1 Aussagen, Aussageformen & Gleichungen
- 3.2 Das Lösen von Gleichungen
- 3.3 Lineare Gleichungen & deren Diskussion
- 3.4 Bruchgleichungen
[zugehörige Lernaufgabe](#)
- 3.5 Quadratische Gleichungen
- 3.6 [Textaufgaben - ein Unterrichtspuzzle](#)
[Textaufgaben - ein Unterrichtspuzzle mit Lösungsansätze](#)
- 3.7 Der Satz von Vieta
- 3.8 Kubische Gleichungen

4 Potenzen, Wurzeln & Logarithmen

- 4.1 Einführung
- 4.2 Das Rechnen mit Potenzen
- 4.3 Potenzgleichungen
- 4.4 Der Logarithmus
- 4.5 Anwendungen

Inhaltsverzeichnis

5	Lineare Gleichungssysteme	1
5.1	Überblick	1
5.2	Lineare 2×2 Gleichungssysteme	1
5.3	Das Gauß'sche Eliminationsverfahren	5
5.3.1	<i>Nicht-lineare</i> Gleichungssysteme	6
5.4	Lineare $n \times n$ Gleichungssysteme	10
5.5	Lineare $m \times n$ Gleichungssysteme	15
5.6	Lineare Gleichungssysteme mit Parametern	18
5.6.1	Weitere Aufgaben zur Diskussion...	20
5.7	Textaufgaben	24
5.7.1	Mischaufgaben	28
5.7.2	Leistungsaufgaben	30
5.8	<i>Meine</i> Zusammenfassung	33

5 Lineare Gleichungssysteme

5.1 Überblick

Wir beginnen mit der Frage *Was ist ein lineares 2×2 Gleichungssystem?* und werden mit Hilfe der geometrischen Interpretation deren *Lösbarkeitsbedingungen* diskutieren und den Begriff der *Determinante* einführen. An Beispielen werden wir die *Lösungsmethoden* für diese Systeme, welche wir aus dem [Leitprogramm](#) zur Einführung der affinen Funktionen schon kennen, *wiederholen* und neu das *Gauß'sche Eliminationsverfahren* kennenlernen.

Dieses werden wir vor allem bei *lineare $n \times m$ Gleichungssystemen*, mit $n, m \geq 3$ zur Anwendung bringen. Insbesondere auch bei der *Diskussion der Lösbarkeitsbedingungen*, welche uns einmal mehr durch das Einführen von Parametern ermöglicht wird.

Über die linearen Gleichungssystemen werden wir den Begriff der *Matrix* einführen und uns mit dem *Rechnen mit Matrizen* befassen, was uns u.a. (wieder) auf die Begriffe der *Inversen* und der *Determinante* bringen wird. Die wir natürlich mit Hilfe von *Gauß* auch von Hand berechnen werden.

Die Verwendung von *Mathematica* ermöglicht uns dann den zum Teil grossen Rechenaufwand zu verkleinern und uns abschliessend in den Anwendungen mit *Mehrstufigen Prozessen* zu befassen.

Begleitend verwenden wir, neben eigenen Aufgaben, die Aufgabensammlung von

Deller/Gebauer/Zinn: *Algebra 1*, Verlag OrellFüssli

5.2 Lineare 2×2 Gleichungssysteme

Was ist ein lineares 2×2 Gleichungssystem ?

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad ax + by = e \\ \text{(II)} \quad cx + dy = f \end{array}$$

Bem.: •
 •
 •

Wenn wir die Gleichungen (I) und (II) nach y auflösen, ermöglicht uns diese *äquivalente* Darstellung eine geometrische Interpretation:

$$(I) \quad ax + by = e \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x + \frac{e}{b}$$

ist ...

mit ...

und hat als Lösungsmenge ...

$$(II) \quad cx + dy = f \quad \Leftrightarrow \quad y =$$

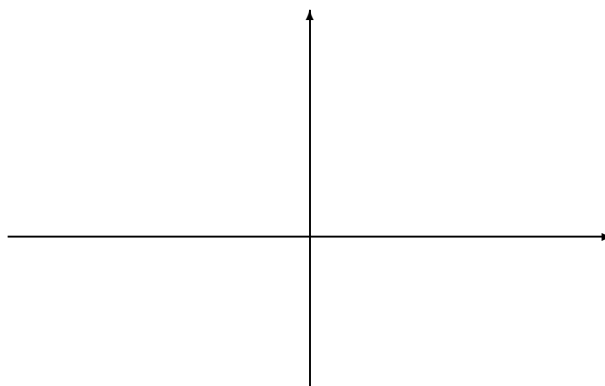
ist ...

mit ...

und hat als Lösungsmenge ...

Die *Lösungsmenge des Gleichungssystems* ist nun die Menge aller Elemente (in diesem Fall also die Menge aller Punkte (x/y)), welche die Gleichung (I) *und* die Gleichung (II) erfüllen.

Graphische Interpretation



Aus der graphischen Darstellung lassen sich sofort die *Lösbarkeitsbedingungen* für ein lineares 2×2 Gleichungssystem ableiten:

- Es existiert genau eine Lösung \Leftrightarrow

- Es existiert keine Lösung \Leftrightarrow

- Es existieren genau zwei Lösungen \Leftrightarrow

- Es existieren genau drei Lösungen \Leftrightarrow

- Es existieren unendlich viele Lösungen \Leftrightarrow

Entscheidend für die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{l} \text{(I)} \quad ax + by = e \\ \text{(II)} \quad cx + dy = f \end{array}$$

ist somit folgender Ausdruck:

Beispiel 5.1 *Bestimme die Lösungen nur in den Fällen, wo sie existiert und eindeutig bestimmt ist:*

$$\begin{aligned}-2x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 - y &= 3x \\ 3y + 9x &= -6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x - 3y &= 4 \\ -9y + 6x &= 12\end{aligned}$$

Aufg.: 5 - 16 ; 5, 11a, 12b, 14, 15b, 16a

5.3 Das Gauß'sche Eliminationsverfahren

Wir werden im Folgenden ein neues Lösungsverfahren kennenlernen,

das *Gauss'sche Eliminations-* oder *Additionsverfahren*,

welches uns auf einfache Art und Weise auch das Lösen linearer Gleichungssysteme höheren Grades erlaubt.

Beginnen werden wir mit einer kurzen Repetition uns schon bekannter Methoden zum Lösen linearer 2×2 Gleichungssysteme:

Beispiel 5.2 *Löse das folgende Gleichungssystem auf verschiedene Wege:*

$$\bullet \begin{array}{rcl} 5x & - & y = 7 \\ 4x & + & y = 7 \end{array}$$

$$\bullet \begin{array}{rcl} 5x & - & y = 7 \\ 4x & + & y = 7 \end{array}$$

$$\bullet \begin{array}{rcl} 5x & - & y = 7 \\ 4x & + & y = 7 \end{array}$$

Aufg.: 17 - 52 ; ...

5.3.1 Nicht-lineare Gleichungssysteme

Wir schliessen den Repetitionsteil mit drei *nicht-linearen* 2×2 - Gleichungssysteme, welche sich auf *lineare* Gleichungssysteme zurückführen lassen:

Beispiel 5.3 Bestimme jeweils die Lösungen der folgenden 2×2 - Gleichungssystemen:

$$\bullet \begin{array}{rcl} 1 : (y + 1) & + & 1 : (y - 1) = (10 - x) : (y^2 - 1) \\ 1 : (x - 2) & + & 3 : (y - 4) = 5 : (2 - x) \end{array}$$

- $$\frac{8}{x-y} - \frac{9}{x+y} = \frac{11}{15}$$
$$\frac{6}{x-y} - \frac{5}{x+y} = \frac{2}{3}$$

- $$\begin{aligned} 3x^{-2} - 7y^{-2} &= 5 \\ 5x^{-2} + 3y^{-2} &= 12 \end{aligned}$$

Aufg.: 75 - 86 ; 76b, 77b, 81a, 82b, 85a

Wir kommen nun endlich zum Gauß' schen Eliminationsverfahren. Das Lösungsverfahren nach Gauß baut auf den uns schon bekannten *Äquivalenzumformungen* auf, welche sind

-
-

Wir werden das folgende Beispiel mit Hilfe des *Gauß-Verfahren* lösen um anschliessend den zugehörigen *Algorithmus* zu formulieren:

Beispiel 5.4 *Löse das folgende lineare 3×3 Gleichungssystem*

$$\begin{array}{rccccrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

1. *mit dem Gleichsetzungsverfahren:*

2. *mit dem Einsetzungsverfahren:*

3. mit dem Gaußverfahren:

$$\begin{array}{rcccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

Die Idee des Gauß-Algorithmus:

5.4 Lineare $n \times n$ Gleichungssysteme

Wir sprechen von einem *linearen (quadratischen) $n \times n$ Gleichungssystem*, wenn
...

Beispiel 5.5 *Wir werden die folgenden Gleichungssysteme gemeinsam lösen und mögliche Vereinfachungen in den Darstellungen besprechen:*

$$\begin{array}{l} 1. \quad \begin{array}{rclcl} 2x & + & y & - & 2z & = & 10 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & 4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & 4x & + 7y = 10 \\ 2. & 3x & + 8z = 13 \\ & y & + 5z = 12 \end{array}$$

Aufgaben 5.1 Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{l} 1. \quad \begin{array}{r} x + 2y + 3z = -2 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - 3y + 2z = 3 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2. \quad \begin{array}{r} 3x + 2y = 1 \\ 2y - z = 0 \\ -8y + 4z = 0 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad x + 2y &= 3z - 1 \\ 3x - y &= -2z + 7 \\ 4z + 2 &= 5x + 3y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 2t - 1 \\ 2t + y &= 2x + 2s \\ 4. \quad x + y + z + s + t &= 3 \\ 3 + 2s + t &= 8x + 2y + z \\ x - z + s &= t + 1 \end{aligned}$$

Aufg.: 133-147, 159 ; ...

5.5 Lineare $m \times n$ Gleichungssysteme

Wir sprechen von einem *linearen $m \times n$ Gleichungssystem*, wenn ...

Aufgaben 5.2 *Gib ein Beispiel eines linearen 4×3 Gleichungssystems an und löse es mit Hilfe des Gauß-Verfahren:*

Aufgaben 5.3 *Gib ein Beispiel eines linearen 3×5 Gleichungssystems an und löse es mit Hilfe des Gauß-Verfahren:*

Aufg.: 153 - 155 ; ...

Zusammenfassung der *Interpretationsmöglichkeiten der letzten Zeile:*

5.6 Lineare Gleichungssysteme mit Parametern

Neben den Variablen lassen sich in einem Gleichungssystem auch *Parameter* einführen. Die Lösungsmethoden bleiben die gleichen, nur die Fragestellungen lassen sich interessanter gestalten:

Beispiel 5.6 *Bestimme k so, dass das folgende Gleichungssystem*

1. *genau eine Lösung,*
2. *keine Lösung,*
3. *unendlich viele Lösungen*

hat:

$$\begin{array}{rcccccc} x & + & 2y & + & kz & = & 4 \\ 5x & + & 6y & - & 7z & = & 8 \\ 9x & - & 10y & - & 11z & = & 12 \end{array}$$

Aufgaben 5.4 Diskutiere vollständig das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & \alpha x_2 & - & x_3 & = & \beta \end{array}$$

Aufg.: 70, 71, 73, 160 ; ...

5.6.1 Weitere Aufgaben zur Diskussion...

1. Welche der folgenden Gleichungssysteme haben keine, genau eine oder unendliche viele Lösungen?

$$(a) \begin{array}{r} -5x + 3y = 12 \\ 4x - y = 2 \end{array} \quad (b) \begin{array}{r} x - y = 1 \\ x + y = -1 \end{array}$$

$$(c) \begin{array}{r} 3x + 2y = 4 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{4} \end{array} \quad (d) \begin{array}{r} 372x - 12y = 0 \\ -31x + y = 0 \end{array}$$

$$(e) \begin{array}{r} 372x - 12y = 3 \\ -31x + y = -\frac{1}{4} \end{array} \quad (f) \begin{array}{r} 372x - 12y = -4 \\ -31x + y = \frac{1}{3} \end{array}$$

2. Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:

$$(a) \begin{array}{r} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ 3x + 2y - z + 2w = 4 \\ 3x + 3y + 3z - 3w = 5 \end{array}$$

$$(b) \begin{array}{r} x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ 2x + 4y - 3z + 4w = 5 \\ 5x + 10y - 8z + 11w = 12 \end{array}$$

$$(c) \begin{array}{r} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 2x + 6y + 2z = 22 \end{array}$$

$$(d) \begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{array}$$

$$(e) \begin{array}{r} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{array}$$

3. Bestimme \mathbf{p} , so dass genau eine Lösung existiert.

$$(a) \quad \begin{array}{l} \mathbf{p}x + y = 2 \\ 2x - 3y = 1 \end{array} \quad (b) \quad \begin{array}{l} 2x - 3\mathbf{p}y = 7 \\ x + 2y = 4 \end{array}$$

$$(c) \quad \begin{array}{l} x - y = 1 \\ \mathbf{p}x - \mathbf{p}^2y = 2 \end{array} \quad (d) \quad \begin{array}{l} 5x - 3y = 0 \\ \mathbf{p}x + 4y = 1 \end{array}$$

$$(e) \quad \begin{array}{l} 5x - 3y = -1 \\ \mathbf{p}x + 4y = 0 \end{array} \quad (f) \quad \begin{array}{l} 5x - 3y = \mathbf{p}^2 \\ \mathbf{p}x + 4y = 0 \end{array}$$

4. Die folgenden Gleichungssysteme sind vollständig zu diskutieren:

(d.h.: Bestimme die Bedingungen, unter welchen das Gleichungssystem keine, genau ein oder unendliche viele Lösungen hat und gib jeweils die Lösungen explizit an.)

$$(a) \quad \begin{array}{l} 3x + y = 1 \\ 2y - z = 0 \\ -8y + pz = 0 \end{array}$$

$$(b) \quad \begin{array}{l} 3x + (r+1)y - \frac{p}{2}z = 2 \\ 6x + 2ry = 4 \\ -3x + (1-r)y + (q + \frac{p}{2})z = 0 \end{array}$$

5. Was für Bedingungen müssen die Parameter \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} erfüllen, damit das folgende Gleichungssystem eine Lösung hat ?

$$\begin{array}{l} x + 2y - 3z = \mathbf{a} \\ 2x + 6y - 11z = \mathbf{b} \\ x - 2y + 7z = \mathbf{c} \end{array}$$

6. Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:

$$(a) \quad \begin{array}{l} x + 2y + 3z = -4 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{array} \quad (b) \quad \begin{array}{l} x + 2y + 3z = -2 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - 3y + 2z = 3 \end{array}$$

$$(c) \quad \begin{array}{l} x + 2y + 3z = -4 \\ 2x - y + z = -1 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{array} \quad (d) \quad \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + z = 12 \\ x - 3y + 2z = 11 \end{array}$$

7. Welche der folgenden Gleichungssysteme haben genau eine Lösung:

$$(a) \begin{array}{rcl} 5x & + & 4y = 12 \\ -4x & - & 3y = 21 \end{array}$$

$$(b) \begin{array}{rcl} 5x & + & 4y = 56 \\ -4x & - & 3y = 31 \end{array}$$

$$(c) \begin{array}{rcl} 5x & + & 4y = 66785 \\ -4x & - & 3y = 0 \end{array}$$

$$(d) \begin{array}{rcll} 3x & + & 2x & - & 8z & = & 0 \\ 12x & + & 6x & + & 12z & = & 1 \\ & & -3x & + & 7z & = & 1 \end{array}$$

$$(e) \begin{array}{rcll} 5a & + & 3b & - & 4c & + & 8d & = & 1 \\ 3a & + & b & - & 2c & + & 6d & = & -1 \\ -11a & + & 22b & + & 3c & - & 4d & = & 2 \end{array}$$

$$(f) \begin{array}{rcll} a & + & 2b & - & 4c & + & 4d & + & e & = & 1 \\ -a & + & 4b & + & 3c & - & 5d & + & 2e & = & 8 \\ -2a & - & 4b & + & 8c & - & 8d & - & 2e & = & -2 \\ 3a & + & 4b & + & 2c & - & d & - & e & = & 0 \\ a & - & b & + & c & - & d & + & e & = & 2 \end{array}$$

Ausführliche Lösungen zu den Diskussionen der Aufgaben 4. & 5. sind zu finden unter [ML-TheorieAufgaben](#)

Lösungen :

1. (a) $\det = (-5) \cdot (-1) - 3 \cdot 4 = -7 \neq 0 \Rightarrow \exists!$ Lösung.
(b) $\det = \dots = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists!$ Lösung.
(c) $\det \neq 0 \Rightarrow \exists!$ Lösung.
(d) $\det = 0 \Rightarrow$ Spezialfall: $ed = 0 = bf \Rightarrow \infty$ - viele Lösungen.
(e) $\det = 0 \Rightarrow$ Spezialfall: $ed = 3 = bf \Rightarrow \infty$ - viele Lösungen.
(f) $\det = 0 \Rightarrow$ Spezialfall: $ed = 4 = bf \Rightarrow \infty$ - viele Lösungen.

2. (a) \nexists Lösung.
(b) $S = (x/y/z/w) = (4 - 2y + w/y/1 + 2w/w)$, $y, w \in \mathbb{R}$
(c) $S = (x/y/z) = (1/3/1)$
(d) $S = (x/y/z) = (\frac{2}{5}z/\frac{3}{5}z/z)$, $z \in \mathbb{R}$
(e) \nexists Lösung.

3. (a) $\mathbf{p} \neq -\frac{2}{3}$
(b) $\mathbf{p} \neq -\frac{4}{3}$
(c) $\mathbf{p} \neq -1 \wedge \mathbf{p} \neq 0$
(d) = (e) = (f) $\mathbf{p} \neq -\frac{20}{3}$

4. (a)
 - für $p \neq 4 \exists!$ Lösung: $S = (x/y/z) = (\frac{1}{3}/0/0)$
 - für $p = 4 \exists \infty$ Lösungen: $S = (x/y/z) = (\frac{1-\frac{z}{2}}{3}/\frac{z}{2}/z)$, $z \in \mathbb{R}$
 - der Fall, dass *keine* Lösung existiert, tritt nie ein.(b)
 - für $p + q \neq 0 \exists!$ Lösung: $S = (x/y/z) = (\frac{2}{3} - \frac{rp}{3(p+q)}/\frac{p}{p+q}/\frac{2}{p+q})$
 - für $p + q = 0 \nexists$ Lösung.
 - der Fall, dass ∞ viele Lösungen existieren, tritt nie ein.

5. $-5a + 2b + c = 0$

6. Für alle Lösungen gilt: $S = (x/y/z)$
 - (a) $S = (1.9/-0.7/-1.5)$
 - (b) $S = (0/-1/0)$
 - (c) $S = (-0.7/-0.9/-0.5)$
 - (d) $S = (5/-2/0)$

7. (a), (b), (c), (d)

5.7 Textaufgaben

Für das Lösen von Textaufgaben mit mehreren Unbekannten gehen wir zur Erstellung der Lösungsgleichung analog zum Verfahren vor, welches wir schon im [ALGEBRA Kapitel 3 Gleichungslehre](#) kennen gelernt haben ...

-
-
-
-

und können für das Lösen gegebenenfalls das *Gauß' sche Eliminationsverfahren* anwenden.

Beispiel 5.7 Wir gehen von einer Funktion $f(x)$ von folgendem Typ aus:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Die Funktion hat ...

- den Achsenabschnitt = -14,
- eine Nullstelle in -7
- und weiter gilt: $P = (-1/18) \in \text{graph}(f)$

Bestimme die Koeffizienten a, b und c .

Beispiel 5.8 *Eine dreistellige Zahl, deren Wert bei der Vertauschung der beiden ersten Ziffern nicht ändert, hat die Quersumme 15. Werden die letzten beiden Ziffern vertauscht, so nimmt der Wert der Zahl um 27 zu. Wie lautet die Zahl?*

Aufg.: 163 - 165 ; ... [zugehörige Lösungen](#)

Beispiel 5.9 *Willi und Fritz sind zwei Brüder. Vor 4 Jahren war Willi 4mal so alt wie Fritz und in 2 Jahren wird er noch doppelt so alt sein.
Wie alt sind die Brüder heute?*

Beispiel 5.10 Bestimme die Parameter a, b und c so, dass die Gleichung

$$z = ax + by + c$$

die folgenden Lösungen hat:

$$(9/8/5), (-4/ - 4/ - 1), (6/5/2)$$

Aufg.: 167, 168 ; ...

5.7.1 Mischaufgaben

Nicht vergessen: Die Möglichkeit der Anwendung des Prinzips der *Drei-* bzw. *Zweisätzen*:

Beispiel 5.11 *Wir betrachten 5kg einer 4%igen Sole, d.h.:*

- 1. Mit wieviel kg Wasser muss die Sole ergänzt werden, damit der Salzgehalt auf 3% sinkt?*
- 2. Wieviel kg Salz muss der verdünnten Lösung beigegeben werden, damit der Salzgehalt wieder bei 4% liegt?*
- 3. Wieviel kg einer 1%igen Sole müssen nun zugeführt werden, um eine 2%ige Salzlösung zu erhalten?*

Aufgaben 5.5 *Wir gehen von 10kg einer 3%igen Sole aus.*

1. *Wieviel kg Wasser sind in der Sole enthalten ?*

2. *Wie gross ist der Salzanteil (in %) wenn der ursprünglichen Sole*

(a) ... 2.5 kg Wasser zugeführt werden.

(b) ... 15g Salz zugeführt werden.

(c) ... 1 kg Wasser entzogen werden.

(d) ... 12g Salz entzogen werden.

(e) ... 2kg einer 4%igen Sole zugeführt werden.

5.7.2 Leistungsaufgaben

Wir wollen uns mit den folgenden Fragen an das Lösungsverfahren von *Leistungsaufgaben* herarbeiten und gehen von folgender Situation aus:

- Ein Behälter hat zwei Zuleitungen A und B.
Die Leitung A füllt den Behälter in 3 Stunden, die Leitung B in 10 Stunden.
 - Wie weit füllt sich der Behälter, wenn beide Leitungen 1 Stunde geöffnet sind ?
 - Wie weit füllt sich der Behälter, wenn beide Leitungen 2 Stunden geöffnet sind ?
 - Wie lange müssen beide Leitungen gleichzeitig geöffnet bleiben, um den Behälter ganz zu füllen?
 - Die Leitung A wird nach 2 Stunden geschlossen und dafür B geöffnet.
Wie lange muss B geöffnet bleiben um den Behälter zu füllen ?
 - Nachdem B schon eine $1/2$ Stunde läuft, wird die Leitung A noch zugeschaltet.
Wie lange dauert es noch, bis der Behälter zur Hälfte gefüllt ist ?

- Ein Behälter hat dieses mal drei Zuleitungen, wobei die Leitung A den Behälter in 3 Stunden zur Hälfte, die Leitung B den Behälter in 4 Stunden ganz und die Leitung C den Behälter in 2 Stunden zu einem Viertel füllt.
 - Wie weit füllt sich der Behälter, wenn alle drei Leitungen während einer Stunde geöffnet sind ?
 - Wie lange müssen alle drei Leitungen gleichzeitig geöffnet bleiben, um den Behälter ganz zu füllen ?
 - Die Leitung A wird nach einer $1/2$ Stunde geschlossen, anschliessend wird die Leitung B für nur 1 Stunde geöffnet.
Wie lange muss die Leitung C jetzt noch geöffnet werden, um den Behälter ganz zu füllen ?
 - Nachdem die Leitung A schon während einer $1/2$ Stunde läuft, wird die Leitung B zugeschaltet. Nach einer weiteren Stunde wird noch die Leitung C geöffnet.
Wie lange sind die drei Leitungen gleichzeitig geöffnet, um den Behälter ganz zu füllen ?

Beispiel 5.12 *Ein Wasserbehälter kann durch die drei Zuleitungen A, B und C gefüllt werden, und zwar durch A und B in c Minuten, durch A und C in b Minuten und durch B und C in a Minuten.*

In wieviel Minuten kann der Behälter durch jede Leitung einzeln gefüllt werden?

In wieviel Minuten kann der Behälter durch alle drei Leitungen gemeinsam gefüllt werden?

5.8 *Meine Zusammenfassung*