Lineare Gleichungssysteme

Kurzversion von Kapitel 5 aus meinem Lehrgang *ALGEBRA*

Ronald Balestra
CH - 7028 St. Peter
www.ronaldbalestra.ch
e-mail: theorie@ronaldbalestra.ch

19. Oktober 2009

Überblick über die bisherigen *ALGEBRA* - Themen:

Inhaltsverzeichnis

5 Lineare Gleichungssysteme

5.1 Lineare $n \times n$ Gleichungssyteme

Eine lineares $n \times n$ Gleichungssystem ist ...

Bekannte Lösungsmethoden:

-
-

Beispiel 5.1.1 Löse das folgende 3×3 Gleichungssystem

1. mit dem Gleichsetzungsverfahren,
2. mit dem Einsetzungsverfahren,
3. dem Gauβverfahren:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

Beispiel 5.1.2 Wir werden die folgenden Gleichungssyteme gemeinsam lösen und in den Darstellungen laufend Vereinfachungen vornehmen:

1. $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & = & 10 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ 5x & + & 4y & + & 3z & = & 4 \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 5x & + & 3y & - & 4z & = & 2 \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 7 \\ x & - & 4y & - & 2z & = & 1 \\ 3x & - & 2y & + & 4z & = & 13 \end{array}$$

Aufgaben : Löse das folgende Gleichungssystem und formuliere in eigenen Worten den Gauβ' Algorithmus:

$$\begin{array}{ccccccccc}
a & + & 2b & - & c & + & d & = & -2 \\
2a & + & b & + & 2c & - & d & = & 7 \\
a & - & b & - & c & + & 2d & = & -3 \\
a & + & 2b & - & 2c & + & d & = & -4
\end{array}$$

5.2 Lineare $m \times n$ Gleichungssysteme

Wir sprechen von einem *linearen* $m \times n$ *Gleichungssystem*, wenn ...

Aufgaben : Gib ein Beispiel eines linearen 4×3 Gleichungssystems an und löse es mit Hilfe des Gauβ - Verfahren:

Bemerkungen:

Aufgaben : Gib ein Beispiel eines linearen 3×5 Gleichungssystems an und löse es mit Hilfe des Gauβ - Verfahren:

Bemerkungen:

5.3 Lineare Gleichungsyteme mit Parametern

Neben den Variablen lassen sich in einem Gleichungssytem auch *Parameter* einführen. Die Lösungsmethoden bleiben die gleichen, nur die Fragestellungen lassen sich interessanter gestalten:

Beispiel 5.3.1 Bestimme **k** so, dass das folgende Gleichungssytem

1. genau eine Lösung,
2. keine Lösung,
3. unendlich viele Lösungen

hat:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & \mathbf{k}z & = & 4 \\ 5x & + & 6y & - & 7z & = & 8 \\ 9x & - & 10y & - & 11z & = & 12 \end{array}$$

Aufgaben : Diskutiere vollständig das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & \alpha x_2 & - & x_3 & = & \beta \end{array}$$

5.4 Eine Aufgabenserie

1. Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 1 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2w & = & 4 \\ 3x & + & 3y & + & 3z & - & 3w & = & 5 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & + & 3w & = & 2 \\ 2x & + & 4y & - & 3z & + & 4w & = & 5 \\ 5x & + & 10y & - & 8z & + & 11w & = & 12 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ x & + & 3y & + & z & = & 11 \\ 2x & + & 5y & - & 4z & = & 13 \\ 2x & + & 6y & + & 2z & = & 22 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \\ x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 5x & + & 3y & - & 4z & = & 2 \end{array}$$

2. Die folgenden Gleichungssysteme sind vollständig zu diskutieren:
(<u>d.h.:</u> Bestimme die Bedingungen, unter welchen das Gleichungssystem keine, genau ein oder unendliche viele Lösungen hat und gib jeweils die Lösungen explizit an.)

(a)
$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 2y & = & 1 \\ 2y & - & z & = & 0 \\ -8y & + & pz & = & 0 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & (r+1)y & - & \frac{p}{2}z & = & 2 \\ 6x & + & 2ry & & & = & 4 \\ -3x & + & (1-r)y & + & (q+\frac{p}{2})z & = & 0 \end{array}$$

3. Was für Bedingungen müssen die Parameter $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ erfüllen, damit das folgende Gleichungssystem eine Lösung hat ?

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & = & \mathbf{a} \\ 2x & + & 6y & - & 11z & = & \mathbf{b} \\ x & - & 2y & + & 7z & = & \mathbf{c} \end{array}$$

4. Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:

$$(a) \quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -4 \\ 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array} \qquad (b) \quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -2 \\ 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 3 \end{array}$$

$$(c) \quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -4 \\ 2x & - & y & + & z & = & -1 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array} \qquad (d) \quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 12 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 11 \end{array}$$

<u>Lösungen :</u>

1. (a) $\nexists$ Lösung.
   (b) $\mathrm{S} = (x/y/z/w) = (4 - 2y + w/y/1 + 2w/w),\ y, w \in \mathbb{R}$
   (c) $\mathrm{S} = (x/y/z) = (1/3/1)$
   (d) $\mathrm{S} = (x/y/z) = (\frac{2}{5}z/\frac{3}{5}z/z),\ z \in \mathbb{R}$
   (e) $\nexists$ Lösung.

2. (a)
   - für $p \neq 4$ $\exists!$ Lösung: $\mathrm{S} = (x/y/z) = (\frac{1}{3}/0/z)$
   - für $p = 4$ $\exists\infty$ Lösungen: $\mathrm{S} = (x/y/z) = (\frac{1-z}{3}/\frac{z}{3}/z),\ z \in \mathbb{R}$
   - der Fall, dass *keine* Lösung existiert, tritt nie ein.

   (b)
   - für $p + q \neq 0$ $\exists!$Lösung: $\mathrm{S} = (x/y/z) = (2 - \frac{rp}{p+q}/\frac{p}{p+q}/\frac{-2}{p+q})$
   - für $p + q = 0$ $\nexists$ Lösung.
   - der Fall, dass ∞ viele Lösungen existieren, tritt nie ein.

3. $-5a + 2b + c = 0$

4. Für alle Lösungen gilt: $\mathrm{S} = (x/y/z)$
   (a) S = (1.9/-0.7/-1.5)
   (b) S = (0/-1/0)
   (c) S = (-0.7/-0.9/-0.5)
   (d) S = (5/-2/0)