

Lineare Gleichungssysteme

Kurzversion von Kapitel 5 aus meinem Lehrgang *ALGEBRA*

Ronald Balestra
CH - 7028 St. Peter
www.ronaldbalestra.ch
e-mail: theorie@ronaldbalestra.ch

19. Oktober 2009

Überblick über die bisherigen *ALGEBRA* - Themen:

1 Mengenlehre

- 1.1 Die Menge im mathematischen Sinne
- 1.2 Darstellungsformen
- 1.3 Teilmengen
- 1.4 Rechnen mit Mengen
- 1.5 Mengen im Koordinatensystem
- 1.6 Rechnen in Mengen

2 Termumformungen

- 2.1 Grundbegriffe
- 2.2 Einfache Termumformungen
- 2.3 Das Rechnen mit Polynomen
- 2.4 Das Rechnen mit Brüchen

3 Gleichungslehre

- 3.1 Aussagen, Aussageformen & Gleichungen
- 3.2 Das Lösen von Gleichungen
- 3.3 Lineare Gleichungen & deren Diskussion
- 3.4 Bruchgleichungen
- 3.5 Quadratische Gleichungen
- 3.6 Textaufgaben
- 3.7 Noch einige Aufgaben

4 Potenzen, Wurzeln & Logarithmen

- 4.1 Einführung
- 4.2 Das Rechnen mit Potenzen
- 4.3 Potenzgleichungen
- 4.4 Der Logarithmus
- 4.5 Anwendungen

Inhaltsverzeichnis

5	Lineare Gleichungssysteme	136
5.1	Lineare $n \times n$ Gleichungssysteme	136
5.2	Lineare $m \times n$ Gleichungssysteme	139
5.3	Lineare Gleichungssysteme mit Parametern	141
5.4	Eine Aufgabenserie	143

5 Lineare Gleichungssysteme

5.1 Lineare $n \times n$ Gleichungssysteme

Eine lineares $n \times n$ Gleichungssystem ist ...

Bekannte Lösungsmethoden:

-
-

Beispiel 5.1.1 Löse das folgende 3×3 Gleichungssystem

1. mit dem Gleichsetzungsverfahren,
2. mit dem Einsetzungsverfahren,
3. dem Gaußverfahren:

$$\begin{array}{rclclcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & - & y & - & z & = & 2 \\ x & + & y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

Beispiel 5.1.2 Wir werden die folgenden Gleichungssysteme gemeinsam lösen und in den Darstellungen laufend Vereinfachungen vornehmen:

$$\begin{array}{l} 2x + y - 2z = 10 \\ 1. \quad 3x + 2y + 2z = 1 \\ \quad 5x + 4y + 3z = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y - 3z = -1 \\ 2. \quad 3x - y + 2z = 7 \\ \quad 5x + 3y - 4z = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 7 \\ 3. \quad x - 4y - 2z = 1 \\ \quad 3x - 2y + 4z = 13 \end{array}$$

Aufgaben : Löse das folgende Gleichungssystem und formuliere in eigenen Worten den Gauß' Algorithmus:

$$\begin{array}{rccccrcr} a & + & 2b & - & c & + & d & = & -2 \\ 2a & + & b & + & 2c & - & d & = & 7 \\ a & - & b & - & c & + & 2d & = & -3 \\ a & + & 2b & - & 2c & + & d & = & -4 \end{array}$$

5.2 Lineare $m \times n$ Gleichungssysteme

Wir sprechen von einem *linearen $m \times n$ Gleichungssystem*, wenn ...

Aufgaben : Gib ein Beispiel eines linearen 4×3 Gleichungssystems an und löse es mit Hilfe des Gauß - Verfahren:

Bemerkungen:

Aufgaben : Gib ein Beispiel eines linearen 3×5 Gleichungssystems an und löse es mit Hilfe des Gauß - Verfahren:

Bemerkungen:

5.3 Lineare Gleichungssysteme mit Parametern

Neben den Variablen lassen sich in einem Gleichungssystem auch *Parameter* einführen. Die Lösungsmethoden bleiben die gleichen, nur die Fragestellungen lassen sich interessanter gestalten:

Beispiel 5.3.1 Bestimme \mathbf{k} so, dass das folgende Gleichungssystem

1. genau eine Lösung,
2. keine Lösung,
3. unendlich viele Lösungen

hat:

$$\begin{array}{rccccr} x & + & 2y & + & \mathbf{k}z & = & 4 \\ 5x & + & 6y & - & 7z & = & 8 \\ 9x & - & 10y & - & 11z & = & 12 \end{array}$$

Aufgaben : Diskutiere vollständig das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & \alpha x_2 & - & x_3 & = & \beta \end{array}$$

5.4 Eine Aufgabenserie

1. Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{l} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ \text{(a)} \quad 3x + 2y - z + 2w = 4 \\ \quad \quad 3x + 3y + 3z - 3w = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ \text{(b)} \quad 2x + 4y - 3z + 4w = 5 \\ \quad \quad 5x + 10y - 8z + 11w = 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y - 3z = 4 \\ \text{(c)} \quad x + 3y + z = 11 \\ \quad \quad 2x + 5y - 4z = 13 \\ \quad \quad 2x + 6y + 2z = 22 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ \text{(d)} \quad 2x - 3y + z = 0 \\ \quad \quad x - 4y + 2z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y - 3z = -1 \\ \text{(e)} \quad 3x - y + 2z = 7 \\ \quad \quad 5x + 3y - 4z = 2 \end{array}$$

2. Die folgenden Gleichungssysteme sind vollständig zu diskutieren:

(d.h.: Bestimme die Bedingungen, unter welchen das Gleichungssystem keine, genau ein oder unendliche viele Lösungen hat und gib jeweils die Lösungen explizit an.)

$$\begin{array}{l} 3x + 2y = 1 \\ \text{(a)} \quad 2y - z = 0 \\ \quad \quad -8y + pz = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x + (r+1)y - \frac{p}{2}z = 2 \\ \text{(b)} \quad 6x + 2ry = 4 \\ \quad \quad -3x + (1-r)y + (q + \frac{p}{2})z = 0 \end{array}$$

3. Was für Bedingungen müssen die Parameter **a**, **b** und **c** erfüllen, damit das folgende Gleichungssystem eine Lösung hat ?

$$\begin{aligned}x + 2y - 3z &= \mathbf{a} \\2x + 6y - 11z &= \mathbf{b} \\x - 2y + 7z &= \mathbf{c}\end{aligned}$$

4. Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{l} (a) \quad x + 2y + 3z = -4 \\ \quad 2x - y + z = 3 \\ \quad x - 3y + 2z = 1 \end{array} & \begin{array}{l} (b) \quad x + 2y + 3z = -2 \\ \quad 2x - y + z = 1 \\ \quad x - 3y + 2z = 3 \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} (c) \quad x + 2y + 3z = -4 \\ \quad 2x - y + z = -1 \\ \quad x - 3y + 2z = 1 \end{array} & \begin{array}{l} (d) \quad x + 2y + 3z = 1 \\ \quad 2x - y + z = 12 \\ \quad x - 3y + 2z = 11 \end{array} \end{array}$$

Lösungen :

1. (a) \nexists Lösung.
(b) $S = (x/y/z/w) = (4 - 2y + w/y/1 + 2w/w)$, $y, w \in \mathbb{R}$
(c) $S = (x/y/z) = (1/3/1)$
(d) $S = (x/y/z) = (\frac{2}{5}z/\frac{3}{5}z/z)$, $z \in \mathbb{R}$
(e) \nexists Lösung.

2. (a)
 - für $p \neq 4 \exists!$ Lösung: $S = (x/y/z) = (\frac{1}{3}/0/z)$
 - für $p = 4 \exists \infty$ Lösungen: $S = (x/y/z) = (\frac{1-z}{3}/\frac{z}{3}/z)$, $z \in \mathbb{R}$
 - der Fall, dass *keine* Lösung existiert, tritt nie ein.(b)
 - für $p + q \neq 0 \exists!$ Lösung: $S = (x/y/z) = (2 - \frac{rp}{p+q}/\frac{p}{p+q}/\frac{-2}{p+q})$
 - für $p + q = 0 \nexists$ Lösung.
 - der Fall, dass ∞ viele Lösungen existieren, tritt nie ein.

3. $-5a + 2b + c = 0$

4. Für alle Lösungen gilt: $S = (x/y/z)$
 - (a) $S = (1.9/-0.7/-1.5)$
 - (b) $S = (0/-1/0)$
 - (c) $S = (-0.7/-0.9/-0.5)$
 - (d) $S = (5/-2/0)$