Algebra-Aufgaben: *Matrizenrechnung 2*

1. Wir definieren das *Kronecker - Symbol* :

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & , \quad \forall j = i \\ 0 & , \quad \forall j \neq i \end{cases}$$

Konstruiere $A \in M_5(\mathbb{R})$, mit $a_{ij} = \delta_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Konstruiere $A \in M_4(\mathbb{R})$, mit $a_{ij} := \begin{cases} 1 & , \quad \forall i = j \\ 2 & , \quad \forall j = i+1 \\ 3 & , \quad \forall j = i+2 \\ 4 & , \quad \forall j = i+3 \\ 0 & , \quad \forall j < i \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechne: $A - B$, $\mathbb{I}_2 - A$, AB, BA, CD, B^2, C^2, D^2, ED, DE

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{I}_2 - A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -7 & 7 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & 19 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$CD = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^2 = \nexists$$

$$ED = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$DE = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Berechne $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Für diese Aufgabe benötigen wir einen neuen Begriff:

> **Def.:** Sei $A\ inM(m \times n, \mathbb{R})$, mit $A = (a_{ij})$.
> Dann ist die **Transponierte** von A wie folgt definiert:
>
> $$A^t := (a_{ji}) =: A^T \text{ i.d.}$$

(a) Für $B \in M(r \times s, \mathbb{R})$ ist die zugehörige Transponierte B^t ein Element aus welcher Menge ? $B^t \in M(s \times r, \mathbb{R})$

(b) Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne: C^t, D^t, E^t, $D \cdot E$, $E^t \cdot D^t$, $(E \cdot D)^t$, $\mathbb{I}_5{}^t$, $F \cdot F^t$, $(F \cdot F)^t$ $\quad t \mapsto T$ i.d.

(c) Definiere das SP mit Hilfe der Matrizenmultiplikation i.d.

$$C^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad D^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad E^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$DE = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad E^T D^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Vermutung: $(AB)^T = B^T A^T$ Beweis: ...

$$(ED)^T = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$ ... Kontrolliere: $= D^T E^T$

$$\mathbb{I}_5{}^T = \mathbb{I}_5, \quad F \cdot F^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(F \cdot F)^T = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = F^T \cdot F^T$$

Aufg.: Beweise, daß die Menge mit $\mathbb{I}_2$ der Pauli-Matrizen bzgl. der Multiplikation abgeschlossen ist. i.d.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$