Algebra - Aufgaben: Matrizenrechnung 3

(1) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x-y \\ y+z \\ z \end{pmatrix}$

a) f ist linear $\Leftrightarrow f(\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ $\quad \left(\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right)$

Beweis: $f(\lambda \vec{x} + \vec{y}) = f\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda x_1 + y_1) - (\lambda x_2 + y_2) \\ (\lambda x_2 + y_2) + (\lambda x_3 + y_3) \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda (x_1 - x_2) + y_1 - y_2 \\ \lambda (x_2 + x_3) + y_2 + y_3 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}$

$\lambda f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_2 + y_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda (x_1 - x_2) + y_1 - y_2 \\ \lambda (x_2 + x_3) + y_2 + y_3 \\ \lambda x_3 \quad y_3 \end{pmatrix}$ $\in$

b) zugehörige Matrix: $A \vec{x} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x-y \\ y+z \\ z \end{pmatrix}$

$A \cdot (3 \times 1) = (3 \times 1) \Rightarrow A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

d) zugehörige Inverse:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\big\} \; II - III$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\big\} \; I + II$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Verifikation durch $A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}_3$ ..

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ für $\det A$:

$$\begin{matrix} & & & 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 7 & 4 & -3 & 7 \\ & & & 0 & 0 & -12 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \underline{\det A} = 0 + 0 + (-12) - 0 - 9 - 0 = \underline{\underline{-21}}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix} \underset{1 \cdot III - 2 II}{\overset{3 \cdot II - 2 I}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} \overset{II \leftrightarrow III}{\rightsquigarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}}$$

$\underline{\det} = 3 \cdot (-3) \cdot (-7) = \underline{63}$

$\Rightarrow \underline{\det A} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot (-1) \cdot 63 = \underline{\underline{-21}}$

- B entsteht durch 2x Zeilentauschen aus A $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\det B}} = (-1) \cdot (-1) \cdot \det A = \underline{\underline{-21}}$
- C entsteht durch Transponieren von A und 1 Spaltentausch aus A $\Rightarrow$ $\det C = (-1) \cdot \det A^T = (-1) \cdot \det A = \underline{\underline{21}}$

(3) $C = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & & & & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}$

$\downarrow \; \vec{c}_i - \vec{c}_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1$

$$\begin{pmatrix} a-b & b-a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a-b & b-a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & b-a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a-b & b-a \\ b & b & b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow \vec{c}_n - \frac{b}{a-b} \cdot \vec{c}_1$

$$\begin{pmatrix} a-b & b-a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a-b & b-a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \underbrace{b - \frac{b}{a-b} \cdot (b-a)}_{2b} & b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow \vec{c}_n - \frac{2b}{a-b} \cdot \vec{c}_2$

$$\begin{pmatrix} a-b & b-a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a-b & b-a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & \underbrace{b - \frac{2b}{a-b} \cdot (b-a)}_{3b} & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow \vec{c}_n - \frac{(n-1) b}{a-b} \cdot \vec{c}_{n-1}$

$$\begin{pmatrix} a-b & b-a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a-b & b-a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b & b-a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a - \frac{(n-1) b}{a-b} \cdot (b-a) = a + (n-1) \cdot b \end{pmatrix}$$

③ v.

$$\Rightarrow \underline{\det C} = (a-3)\cdot(a-3)\cdot \ldots \cdot (a-3)\cdot(a+(n-1)\cdot 3)$$

$$= (a-3)^{n-1} \cdot (a+n3-3)$$

$$= (a-3)^{n-1} \cdot (a-3)\cdot\left(1+\frac{n3}{a-3}\right)$$

$$= \underline{\underline{(a-3)^{n}\cdot\left(1+\frac{n3}{a-3}\right)}}$$

④ Beh.: $\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{0}, \ldots, \vec{a}_n) = 0$

Beweis: $\det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{0}, \ldots, \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i - \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_n)$

$$= \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_n) - \det(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_n)$$

$$= 0 \quad \square$$

⑤ $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 5x_1 y_2 + 5x_2 y_1 + 26 x_2 y_2$

Beh.: f ist eine symmetrische Bilinearform

Beweis i) f ist symmetrisch, d.h. z.z. ist $f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$

$$\left.\begin{aligned} f(\vec{x}, \vec{y}) &= x_1 y_1 + 5 x_1 y_2 + 5 x_2 y_1 + 26 x_2 y_2 \\ f(\vec{y}, \vec{x}) &= y_1 x_1 + 5 y_1 x_2 + 5 y_2 x_1 + 26 y_2 x_2 \end{aligned}\right\} \Leftarrow \text{(Kommut. der Mult.)}$$

ii) f ist BF, d.h. z.z. ist $f(\lambda \vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = \lambda \cdot f(\vec{x}_1, \vec{y}) + f(\vec{x}_2, \vec{y})$

und $f(\vec{x}, \lambda \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \lambda \cdot f(\vec{x}, \vec{y}_1) + f(\vec{x}, \vec{y}_2)$

Wegen der Symmetrie genügt es eine 1 gl. zu zeigen:

$$\underline{f(\lambda \vec{a} + \vec{b}, \vec{c})} = f\left(\begin{pmatrix} \lambda a_1 + b_1 \\ \lambda a_2 + b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= (\lambda a_1 + b_1)\cdot c_1 + 5\cdot(\lambda a_1 + b_1) c_2 + 5\cdot(\lambda a_2 + b_2) c_1 + 26 (\lambda a_2 + b_2) c_2$$

$$= \lambda (a_1 c_1 + 5 a_1 c_2 + 5 a_2 c_1 + 26 a_2 c_2) + b_1 c_1 + 5\cdot b_1 c_2 + 5\cdot b_2 c_1 + 26 b_2 c_2$$

$$= \underline{\lambda \cdot f(\vec{a}, \vec{c}) + f(\vec{b}, \vec{c})} \quad \square$$