1. *Wählerwanderung*

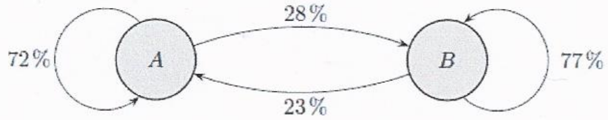
   Das folgende Übergangsdiagramm erfasst die Wählerwanderung zwischen den Parteien A und B.

$U \cdot \vec{x}_0 = \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}$

$A_1 = 0.72 \cdot A_0 + 0.23 \cdot B_0$

$B_1 = 0.77 \cdot B_0 + 0.28\, A_0$

$\Rightarrow \underline{U = \begin{pmatrix} 0.72 & 0.23 \\ 0.28 & 0.77 \end{pmatrix}}$



   Zum jetzigen Zeitpunkt wählen 42% die Partei A und 58% die Partei B.

   Welche Prognosen sind möglich, wenn wir konstante Übergangsquoten voraussetzen?

2. *Diffusionsmodell*

   Ein mit 12'000 Teilchen gefüllter Behälter ist durch eine durchlässige Wand (Membran) in zwei Hälften A und B geteilt. Die Verteilung der Teilchen auf die beiden Hälften verändert sich jeweils nach Ablauf einer festen Zeiteineit (Takt): 10% der sich in A befindlichen Teilchen diffundieren nach B und 20% der sich in B befindlichen Teilchen gelangen nach A. Das System soll abgeschlossen sein. Am Anfang sind 3'000 Teilchen in A und der Rest in B.

   Untersuche die langfristige Entwicklung der Teilchen auf die beiden Hälften.

A	B
$3'000 = A_0$	$9'000 = B_0$

$\left.\begin{matrix} A_1 = 0.9\, A_0 + 0.2\, B_0 \\ B_1 = 0.8\, B_0 + 0.1\, A_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow U = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 3000 \\ 9000 \end{pmatrix} \to \dots\ \vec{v}_\infty = \begin{pmatrix} 8000 \\ 4000 \end{pmatrix}$

Bem. Berechnung Grenzwert:

für $\vec{v}_\infty = v$ gilt: $A\vec{v}_\infty = \vec{v}_\infty$

3. *Eichhörnchen-Population*

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurden in England graue Eichhörnchen aus Amerika eingeführt, welche nun mit den einheimischen Eichhörnchen konkurrieren.
Um die Veränderung der Population zu erfassen, wurden Teile englischer Wälder in gleichgrosse Bereiche aufgeteilt, in denen jährliche Zählungen (ab 1973) durchgeführt wurden.
Für die einzelnen Bereiche wurde das Vorhandensein der Eichhörnchen mit folgenden Zuständen unterschieden:

R	nur rote,
G	nur graue,
RG	rote und graue,
K	keine Eichhörnchen.

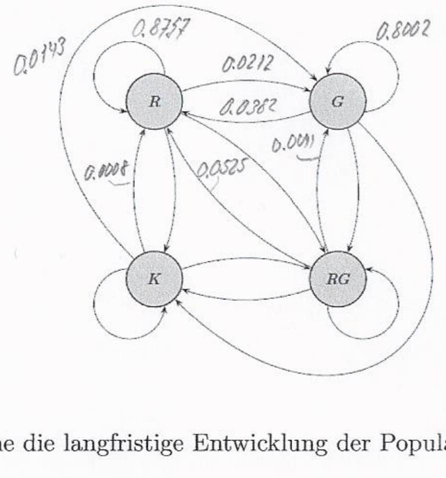
Die 16 möglichen Übergänge von einem zum folgenden Jahr wurden ermittelt, z.B. gab es im Vorjahr in 35 Bereichen nur graue Einchhörnchen, jetzt gibt es dort nur noch rote:

	R	*G*	*RG*	*K*
R	2529	35	257	5
G	61	733	20	91
RG	282	25	4311	335
K	3	123	310	5930
	2875	916	4858	6361

$$\Rightarrow \underline{U} = \begin{pmatrix} \frac{2525}{2875} & \frac{35}{916} & \frac{257}{4858} & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

$$\doteq \begin{pmatrix} 0.8797 & 0.0382 & 0.0525 & 0.0008 \\ 0.0212 & 0.8002 & 0.0041 & 0.0143 \\ 0.0981 & 0.0273 & 0.8802 & 0.0527 \\ 0.0010 & 0.1343 & 0.0633 & 0.9322 \end{pmatrix}$$

Ergänze das folgende Diagramm



und untersuche die langfristige Entwicklung der Population.

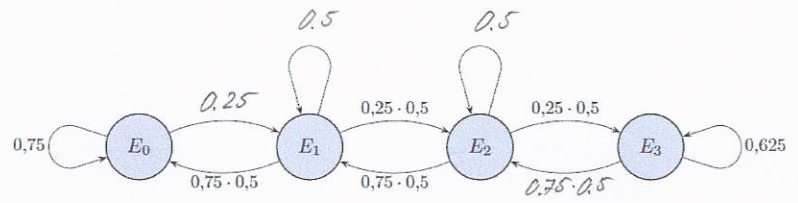
$$U^{100} = \begin{pmatrix} 0.1705 & 0.1705 & 0.1705 & 0.1705 \\ 0.0560 & 0.0560 & 0.0560 & 0.0560 \\ 0.3422 & 0.3422 & 0.3422 & 0.3422 \\ 0.4314 & 0.4314 & 0.4314 & 0.4314 \end{pmatrix}$$

$$U^{120} = \begin{pmatrix} 0.1705 & 0.1705 & 0.1705 & 0.1705 \\ 0.0560 & 0.0560 & 0.0560 & 0.0560 \\ 0.3421 & 0.3421 & 0.3421 & 0.3421 \\ 0.4314 & 0.4314 & 0.4314 & 0.4314 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 17.1% der Bereiche enthalten nur rote Eichhörnchen
5,6% —— " —— nur graue —— " ——
34.2% —— " —— beide —— " ——
Kein Eichhörnchen mehr in 43.1% der Bereiche

4. *Warteschlange*

An einer Tankstelle treffen Kunden ein - pro Zeiteinheit höchstens einer. Falls der Tankwart gerade eine Kunden betreut, müssen sich die anderen in eine Warteschlange einordnen. Ihre Bedienung erfolgt frühestens in der Periode nach ihrer Ankunft. An der Tankstelle ist zur Zeit Platz für drei Autos. Sind sie besetzt, so müssen potentielle Kunden weiterfahren.
Der Inhaber der Tankstelle möchte nun wissen, wie gross die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass sich genau drei Autos an der Tankstelle befinden, um so entscheiden zu können, ob Platz für weitere Autos geschaffen werden muss.
Empirische Unteruschungen ergaben die folgenden Werte:
In jedem Zeitintervall beträgt die Wahrscheinlichkeit für die Ankunft eines Kunden $p_1 = 0.25$. Mit der Wahrscheinlichkeit $p_2 = 0.5$ endet die Bedienung des Kunden im Zeitintervall - unabhängig von der Anzahl der bisher benötigten Zeiteinheiten. Im Zustand E_i befinden sich i Kunden an der Tankstelle. Die Übergangswahrscheinlichkeiten können dem folgenden Diagramm entnommen werden:



Die Wahrscheinlichkeit 0.625, dass die Warteschlange im Zustand E_3 bleibt, setzt sich zusammen aus:
0.5 (Bedinung endet) · 0.25 (neuer Kunde) + 0.5 (Bedinung endet nicht)

(a) Ergänze die fehlenden Werte im Diagramm.

(b) Zu Beginn sei kein Auto an der Tankstelle, d.h. die War~~teschlange~~ hrscheinlichkeit für E_0 ist gleich eins, für die anderen Zustände gleich null.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Zustände für die nächsten 5 Zeiteinheiten.

(c) Untersuche die Wahrscheinlichkeiten langfristig und entscheide, ob ein Ausbau sinnvoll ist oder nicht.

b) $U = \begin{pmatrix} 0.75 & b & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & b & 0 \\ 0 & a & 0.5 & b \\ 0 & 0 & a & 0.625 \end{pmatrix}$ $\quad a = 0.25 \cdot 0.5$, $b = 0.75 \cdot 0.5$

$\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0.656 \\ 0.313 \\ 0.0313 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0.605 \\ 0.332 \\ 0.055 \\ 0.004 \end{pmatrix}, \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 0.582 \\ 0.338 \\ 0.070 \\ 0.009 \end{pmatrix}, \vec{v_5} = \begin{pmatrix} 0.563 \\ 0.341 \\ 0.081 \\ 0.015 \end{pmatrix}$

c) $\vec{v_\infty} = \begin{pmatrix} 0.509 \\ 0.340 \\ 0.113 \\ 0.038 \end{pmatrix}$