# 5.8 Eine Aufgabenserie / Weitere Aufgaben zur Diskussion

## ④ Vollständige Diskussion.

c) ↪

$$\begin{matrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & p & 0 \end{matrix} \quad \xrightarrow{III + 4II} \quad \begin{matrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{p-4} & 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ "letzte" Zeile ergibt: $\underline{(p-4)\cdot z = 0}$

Lin. Gleichung in der Normalform,
mit Lin. Koeffizient $= p-4$
konst. Glied $= 0$

$\Rightarrow$ Diskussion: • genau eine Lösg $\iff$ Lin. Koeff. $\neq 0$
$\iff p-4 \neq 0 \iff \underline{\underline{p = 4}}$

$\Rightarrow$ Lösg.: • $\underline{\underline{z}} = \dfrac{0}{p-4} = \underline{\underline{0}}$

• $2y - 1\cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = 0}}$

• $3x + 1\cdot 0 + 0\cdot 0 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x = 1/3}}$

• keine Lösg $\iff$ Lin. Koeff $= 0 \wedge$ konst. Glied $\neq 0$
$\iff p-4 = 0 \wedge 0 \neq 0$ ↯ $\Rightarrow$ Dieser Fall tritt nie ein!

• unendl. viele Lösg $\iff$ Lin. Koeff $= 0 \wedge$ konst. Glied $= 0$
$\iff p-4 = 0 \wedge 0 = 0$
$\iff \underline{\underline{p = 4}}$

$\Rightarrow$ Lösg: • $z = \underline{\underline{z \in \mathbb{R}}}$ bel.

• $2y - z = 0 \iff \underline{\underline{y = z/2}}$

• $3x + 1\cdot z/2 + 0\cdot z = 1 \iff x = \dfrac{1 - z/2}{3}$

5) $\rightarrow$

$$\begin{array}{cccc} 3 & (r+1) & -p/2 & 2 \\ 6 & 2r & 0 & 4 \\ -3 & 1-r & q+p/2 & 0 \end{array}$$

$$\Big\downarrow \; \text{III} + \text{I}, \; \text{II} - 2\text{I}$$

$$\begin{array}{cccc} 3 & r+1 & -p/2 & 2 \\ 0 & -2 & p & 0 \\ 0 & 2 & q & 2 \end{array}$$

$$\Big\downarrow \; \text{III} + \text{II}$$

$$\begin{array}{cccc} 3 & r+1 & -p/2 & 2 \\ 0 & -2 & p & 0 \\ 0 & 0 & p+q & 2 \end{array}$$

$\Rightarrow$ $\underline{(p+q)\cdot z = 2}$, lin. Koeff $= p+q$, konst. Glied $= 2$

Diskussion: · genau eine Lösg. $\Leftrightarrow p+q \neq 0$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{p \neq -q}}$

$\Rightarrow$ Lösg. $\underline{\underline{z = \frac{2}{p+q}}}$

· $-2y + p\cdot\frac{2}{p+q} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{p}{p+q}}}$

· $3x + (r+1)\cdot\frac{p}{p+q} - \underbrace{\frac{p}{2}\cdot\frac{2}{p+q}}_{=\frac{p}{p+q}} = 2 \Rightarrow x = \frac{2 - r\cdot\frac{p}{p+q}}{3}$

$\underline{\underline{= \frac{2}{3} - \frac{rp}{3(p+q)}}}$

· keine Lösg. $\Leftrightarrow p+q = 0 \;\wedge\; 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{p = -q}}$

· $\infty$-viele Lösg. $\Leftrightarrow p+q = 0 \;\wedge\; \underline{2 = 0}$ ↯

$\Rightarrow$ Dieser Fall tritt nie ein!

5 $\rightarrow$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 2 & 6 & -11 & b \\ 1 & -2 & 7 & c \end{array} \xrightarrow[\text{III} - \text{I}]{\text{II} - 2\text{I}} \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b-2a \\ 0 & -4 & 10 & c-a \end{array}$$

$$\xrightarrow{\text{III} + 2\text{II}} \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{c-a+2\cdot(b-2a)}_{= -5a+2b+c} \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{0 \cdot z = -5a+2b+c}$$

$\Rightarrow$ Eine Lösg. existiert, mit $\underline{\underline{-5a+2b+c=0}}$

Beachte: · "Genau eine" Lösg. existiert nie! (Lin. Koeff. $= 0$ ↯)

· "keine" Lösg. im Falle von $-5a+2b+c \neq 0$

· "Eine" Lösg. existiert im Falle von $\infty$-vielen Lösg.