Lineare Optimierung

Blockunterricht für einen Tag

eine Klassenarbeit

Sonderwoche KSL , Juli 24

Gymnasiale Unterstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

11. Juli 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Überblick

Wir werden gemeinsam *im Plenum* und *in Gruppen*

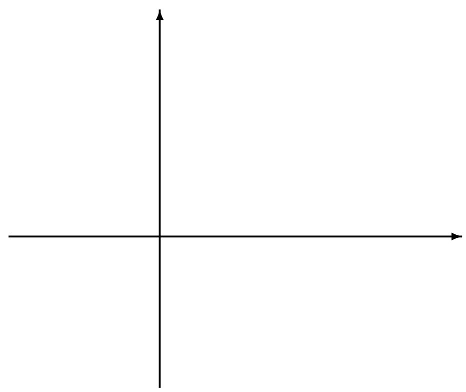
- das Koordinatensystem zusammen mit affinen Funktionen mengentheoretisch untersuchen,
  - · auf der x-Achse,
  - · in der xy-Ebene
- besprechen, um was es bei der linearen Optimierung geht,
- unser erarbeitetes Wissen praktisch zur Anwendung bringen.

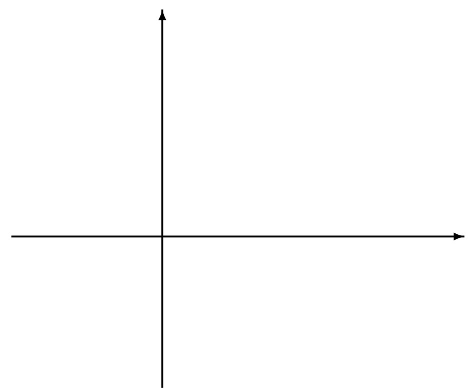
(Provisorischer) Zeitplan

Während der Sonderwoche '24 an der *KSL:*

2 Mengentheoretische Betrachtungen auf der x-Achse

Wir wollen uns das Koordinatensystem mit den Graphen affiner Funktion mengentheoretisch betrachten, mit dem Ziel, die Menge der Argumente zu bestimmen, auf welcher der Funktionswert $<$, $>$ oder $= 0$ ist:

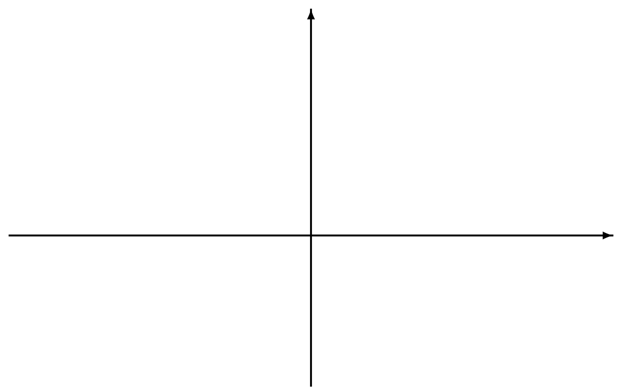




Der Definitionsbereich lässt sich disjunkt zerlegen ...

und entscheidend für diese Zerlegung sind: ...

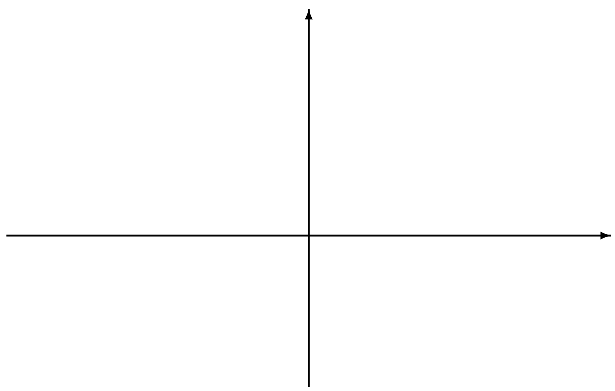
Beispiel 1 Bestimme die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ für $\frac{3}{2}x - 3 < 0$



Aufgaben 1 *Bestimme die Lösungsmengen für die folgenden Ungleichungen:*

- $0.75x - 1 < 0$
- $0.3 - 3.2x \leq -2.7x - 1.9$

- *und anschliessend noch die Menge aller* $x \in \mathbb{R}$*, die* beide *Ungleichungen erfüllen.*



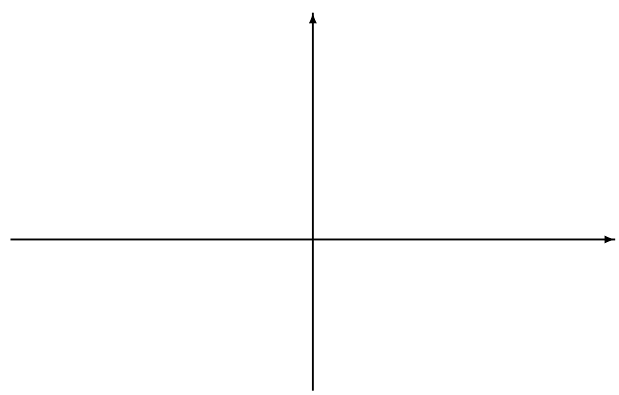
Bestimme abschliessend noch $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid (0.75x-1)(-0.5x+2.2) \left\{ \begin{array}{cc} > & 0 \\ = & 0 \\ < & 0 \end{array} \right. \right\}$

3 Mengentheoretische Betrachtungen in der xy-Ebene

Wir wollen uns diesmal nicht nur der x-Achse, sondern der gesamten xy-Ebene zuwenden, mit dem Ziel, die *Menge aller Punkte* zu bestimmen, welche die Bedingung $y < f(x)$, $y > f(x)$ oder y $= f(x)$ erfüllen.

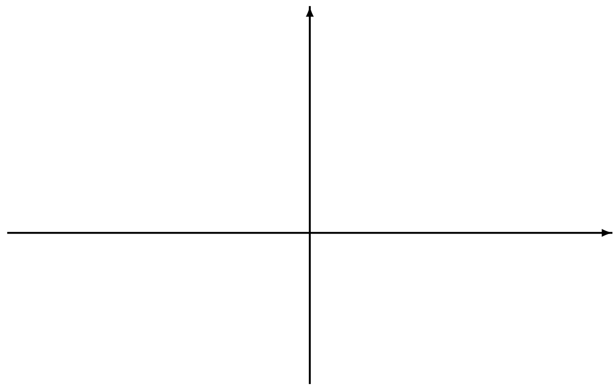
Beispiel 2 Wir wollen die möglichen Fallunterscheidungen an folgender Ungleichung besprechen:

$$3x + 2y - 12 \leq 0$$

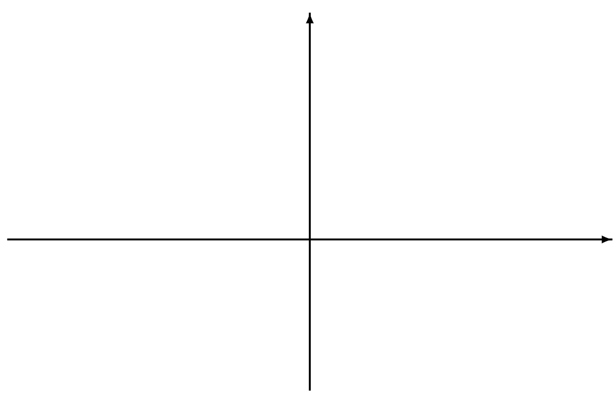


Beispiel 3 Stelle die Lösungsmenge der folgenden Systeme von linearen Ungleichungen graphisch dar:

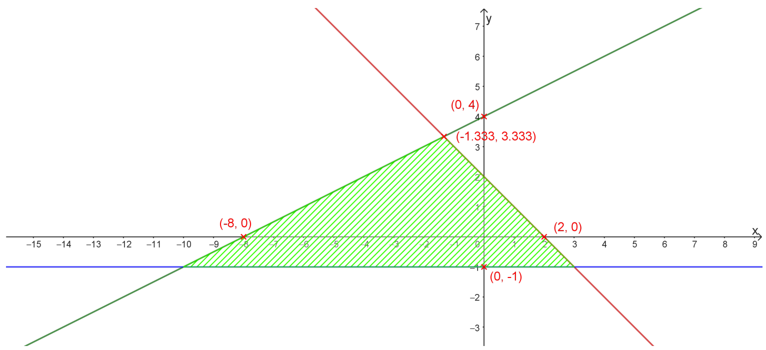
1. $$\begin{array}{lcll} \text{(I)} & y & < & \frac{1}{2}x+2 \\ \text{(II)} & y & \leq & -\frac{1}{2}x+4 \end{array}$$



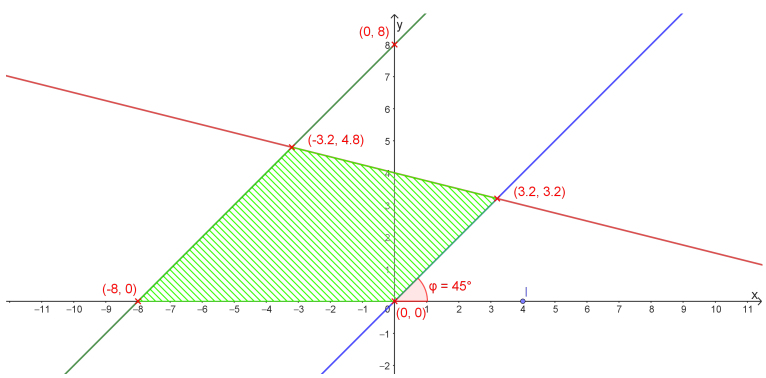
2. $$\begin{array}{lcll} \text{(I)} & y & < & \frac{1}{2}x+2 \\ \text{(II)} & y & \leq & -\frac{1}{2}x+4 \\ \text{(III)} & y & \leq & -x+6 \\ \text{(IV)} & y & \geq & 0 \\ \text{(V)} & x & \leq & 0 \end{array}$$



Aufgaben 2 *Beschreibe mengentheoretisch die schraffierte Fläche:*



Aufgaben 3 *Beschreibe mengentheoretisch die schraffierte Fläche:*



4 Lineare Optimierung (mit zwei Variablen)

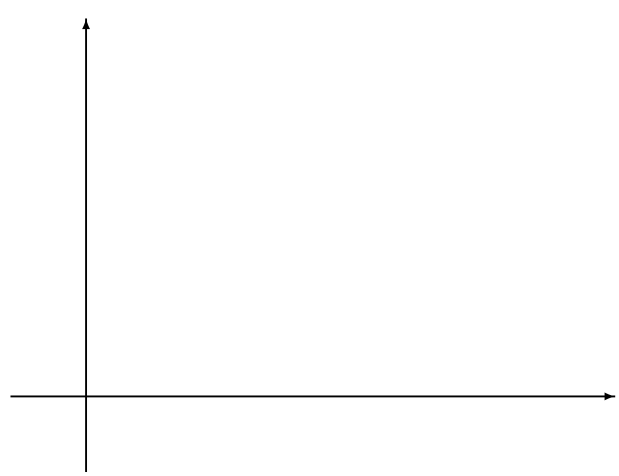
Die *lineare Optimierung* ist die klassische Anwendung aus dem Bereich der Systeme von Ungleichungen. Hierbei geht es darum eine *Zielfunktion* unter gegebenen *Nebenbedingungen* zu *optimieren* (d.h. maximieren/ minimieren).
Optimierungsaufgaben spielen in der Wirtschaft, Verwaltung und Technik eine bedeutende Rolle. Es geht darum, aus einer Vielzahl von möglichen Lösungen die unter bestimmten Bedingungen (den Nebenbedingungen) beste Lösung (die optimale Lösung) zu bestimmen.

Wir werden uns auf das Lösen von Optimierungsaufgaben mit höchstens zwei Variablen beschränken. (Probleme mit mehr als hundert Variablen sind in der Praxis keine Seltenheit, verlangen zur Lösung jedoch elektronische Hilfsmittel, da der Rechenaufwand schnell sehr gross wird.)

Wir beginnen mit einem rein mathematischen Problem:

Beispiel 4 Für welche Wahl von x und y wird $x + y$ maximal, unter folgenden Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} &\text{(I)} && 2x + 5y \leq 20 \\ &\text{(II)} && 2x + y \leq 8 \\ &\text{(III)} && x \geq 0 \\ &\text{(IV)} && y \geq 0 \end{aligned}$$



Aufgaben 4 *Wir betrachten die Zielfunktion*

$$z = 2x + y$$

unter folgenden Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) && 2x + 6y \leq 300 \\ &(\mathrm{II}) && 5x + 5y \leq 350 \\ &(\mathrm{III}) && 6x \leq 300 \end{aligned}$$

1. *Bestimme den Punkt, in welchem die Zielfunktion maximal ist.*

2. *Bestimme das Minimum der Zielfunktion.*

4.1 Anwendungen

Beispiel 5 Ein Werk stellt zwei Fahrradtypen A und B her. Vom Typ A können täglich maximal 600 Stück fertiggestellt werden, vom Typ B maximal 300. Wegen Mangel an Personal sind jedoch nicht mehr als 750 Stück insgesamt möglich. Der Reingewinn für ein Fahrrad vom Typ A beträgt durchschnittlich Fr. 240.-, für ein Fahrrad vom Typ B Fr. 360.-. Wie viele Fahrräder werden täglich von jedem Typ produziert, wenn der Reingewinn maximal sein soll und wie gross ist der Reingewinn?

Beispiel 6 Familie Meier hat Fr 180'000.- geerbt und möchte diesen Betrag teilweise in zwei verschiedene Aktien investieren. Die erste Aktie kostet Fr 25.- pro Stück, die zweite kostet Fr 45.- pro Stück. Die erste Aktie lieferte im im vergangenen Jahr eine Dividende (Gewinnausschüttung) von Fr 5.50 pro Stück, bei der zweiten Aktie betrug die Dividende Fr 2.30 pro Stück.
Famile Meier möchte nun mindestens Fr 20'000.-, aber höchstens ein Drittel der Erbschaft investieren. Weiter möchte sie mindestens 1'000 Stück von der zweiten Aktie kaufen.
Zur Vereinfachung geht sie von einer gleichbleibenden Dividende für das folgende Jahr aus.

- Wie viel Stück von jeder Aktie sollte Familie Meier für einen maximalen Gewinn kaufen?
- Wie hoch wäre dieser maximale Gewinn?

5 Weitere Anwendungen & Beispiele

und nun seid ihr dran :
Für eure Aufgaben (und als Repetion noch einem kurzen Theorieteil zur Einführung des Begriffs der linearen Optimierung) verwenden wir das folgende Skript von Marcel Fischer:

1.8 lineare Optimierung

Inhaltsverzeichnis

http://www.marcelfischer2.ch/Skripte/KlasseCBaschung/Jahr1/18linOptimierung/18S.pdf

In Gruppen habt ihr die folgenden Aufgaben zu lösen und die Lösung zu präsentieren:

- Aufg 1 - 4
- Aufg 5 - 8
- Aufg 9 - 12
- Aufg 3 - 6
- Aufg 7 - 10
- Aufg 11 - 2

Schöne Ferien

RB