

# Systeme linearer Ungleichungen

*ALGEBRA* Kapitel 6

MNProfil - Gymnasiale Mittelstufe

Ronald Balestra  
CH - 8046 Zürich  
[www.ronaldbalestra.ch](http://www.ronaldbalestra.ch)

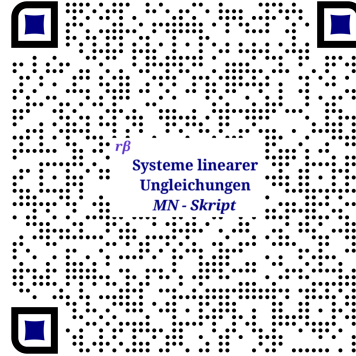
**Name:**

**Vorname:**

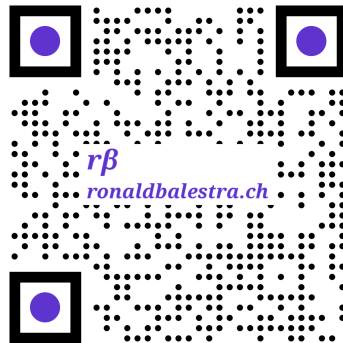
14. Januar 2023

Die *QR* - Codes  
zu den  
*Systemen linearer  
Ungleichungen*  
MNProfil

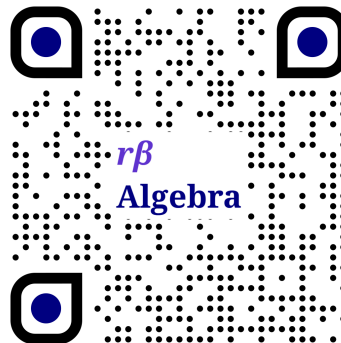
zum [aktuellen Skript](#)



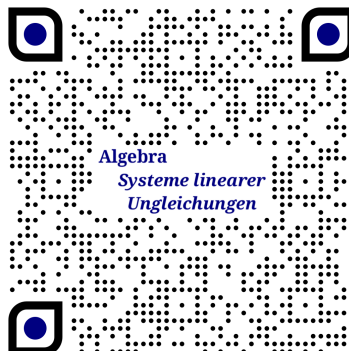
zur [Homepage](#)



zur [Übersicht Algebra](#)



zu den [Systemen linearer Ungleichungen](#)



Überblick über die bisherigen *ALGEBRA* - Themen:  
(in den MNProfil-Versionen)

## 1 **Mengenlehre**

- 1.1 Die Menge im mathematischen Sinne
- 1.2 Darstellungsformen
- 1.3 Teilmengen
- 1.4 Rechnen mit Mengen
- 1.5 Mengen im Koordinatensystem
- 1.6 Rechnen in Mengen
- 1.7 Eine Gruppe - verschiedene Beispiele/Anwendungen

## 2 **Termumformungen**

- 2.1 Grundbegriffe
- 2.2 Einfache Beweisführungen in der Mathematik
- 2.3 Das Rechnen mit Polynomen
- 2.4 Das Rechnen mit Brüchen

Zur **Faktorzerlegung von Polynomen 2. Grades** -  
*eine Trilogie von **Lernaufgaben** in vier Teilen*

Sie deckt die Kapitel 2.3 und 2.4 (ohne den Divisionsalgorithmus) ab.

Teil 1 [Die Herleitung & Anwendung der Binomischen Formeln](#)

Teil 2 [Die Herleitung & Anwendung des Klammeransatzes](#)

Teil 3 [Anwendungen des in Teil 1 & 2 erlernten Wissens](#)

### 3 Gleichungslehre

#### Teil 1

- 3.1 Aussagen, Aussageformen & Gleichungen
- 3.2 Das Lösen von Gleichungen
- 3.3 Lineare Gleichungen mit Parametern & deren Diskussion
  - 3.3.3 Die Mächtigkeit der Lösungsmenge - *eine Lernaufgabe*
- 3.4 Die Lösungsverfahren für Bruchgleichungen

#### Teil 2

- 3.5 Quadratische Gleichungen
  - 3.5.1 Bruchgleichungen & Biquadratische Gleichungen - *eine Lernaufgabe*
- 3.6 Textaufgaben - *ein Unterrichtspuzzle*
- 3.7 Der Satz von Vieta
- 3.8 Kubische Gleichungen

### 4 Potenzen, Wurzeln & Logarithmen

- 4.1 Einführung
- 4.2 Das Rechnen mit Potenzen
- 4.3 Potenzgleichungen
- 4.4 Der Logarithmus
- 4.5 Anwendungen
- 4.6 Weitere Beispiele & Anwendungen

### 5 Lineare Gleichungssysteme

- 5.1 Überblick
- 5.2 Lineare  $2 \times 2$  Gleichungssysteme
- 5.3 Das Gauß'sche Eliminationsverfahren
- 5.4 Lineare  $n \times n$  Gleichungssysteme
- 5.5 Lineare  $m \times n$  Gleichungssysteme
- 5.6 Lineare Gleichungssysteme mit Parameter
- 5.7 Textaufgaben
- 5.8 Matrizenkalkül
- 5.9 Mehrstufige Prozesse

## Inhaltsverzeichnis

<b>6 Systeme von linearen Ungleichungen</b>	<b>1</b>
6.1 Mengentheoretische Betrachtungen auf der $x$ -Achse . . . . .	1
6.2 Produkteungleichungen . . . . .	4
6.3 Mengentheoretische Betrachtungen in der $xy$ -Ebene . . . . .	9
6.4 Lineare Optimierung (mit zwei Variablen) . . . . .	12
6.4.1 Anwendungen . . . . .	15
6.5 Weitere Anwendungen & Beispiele . . . . .	19
6.6 Lineare Optimierung & MATHEMATICA . . . . .	20
6.7 Der Simplexalgorithmus . . . . .	21
6.8 <i>Meine Zusammenfassung</i> . . . . .	22

## 6 Systeme von linearen Ungleichungen

In diesem Kapitel werden wir *lineare Ungleichungen*, *Produkteungleichungen* und *Systeme von linearen Ungleichungen* mengentheoretisch im Koordinatensystem betrachten, dazu geometrische und algebraische *Lösungsmethoden* entwickeln und das Kapitel mit der Diskussion von *linearen Optimierungsproblemen* abschliessen.

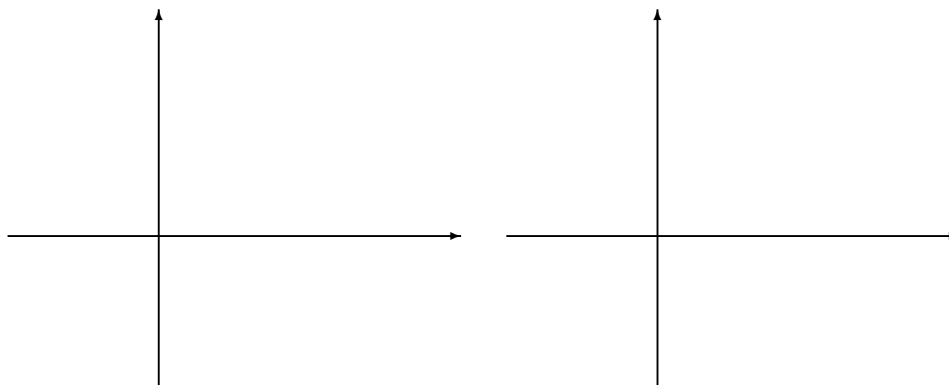
Begleitend wird wieder die Aufgabensammlung von

Deller/Gebauer/Zinn: *Algebra 1*, Verlag OrellFüssli

verwendet.

### 6.1 Mengentheoretische Betrachtungen auf der $x$ -Achse

Wir wollen uns das Koordinatensystem mit den Graphen affiner Funktion mengentheoretisch betrachten, mit dem Ziel, die Menge der Argumente zu bestimmen, auf welcher der Funktionswert  $<$ ,  $>$  oder  $= 0$  ist:

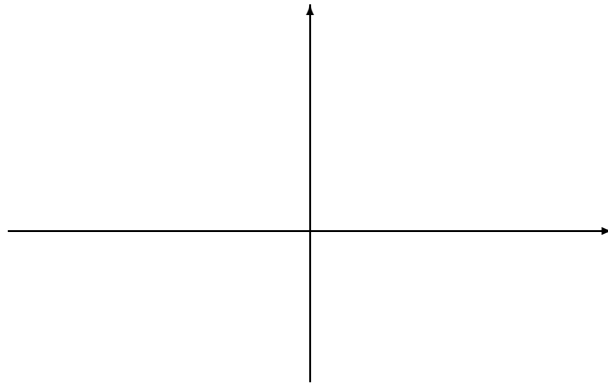


Der Definitionsbereich lässt sich disjunkt zerlegen ...

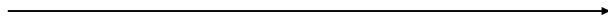
und entscheidend für diese Zerlegung sind: ...

**Beispiel 6.1.** Bestimme die Lösungsmenge  $\mathbb{L}$  für  $\frac{3}{2}x - 3 < 0$

- mit Hilfe des Graphen im Koordinatensystem:



- Vereinfacht: (nur mit der  $x$ -Achse und der NS)

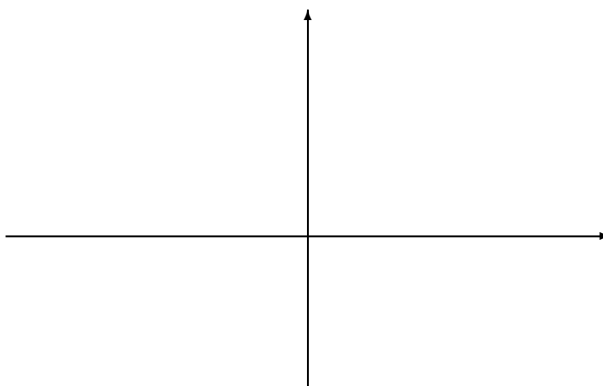


**Aufgaben 6.1.** Bestimme die Lösungsmengen für die folgenden Ungleichungen:

1.  $0.75x - 1 < 0$

2.  $0.3 - 3.2x \leq -2.7x - 1.9$

• mit Hilfe der Graphen in einem Koordinatensystem:



• in der Kurzversion:



Bestimme abschliessend noch  $\{x \in \mathbb{R} \mid (0.75x-1)(-0.5x+2.2) \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \}$

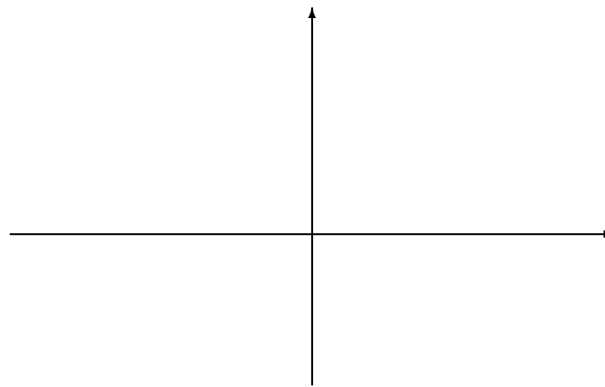


## 6.2 Produkteungleichungen

Wir können die bisherigen Betrachtungen auch auf das Lösen von *Produkteungleichungen* anwenden:

**Beispiel 6.2.**  $(3x + 5)(10 - 2x) < 0$

- Löse mit Hilfe des Graphen im Koordinatensystem:



- Löse in der Kurzversion:

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

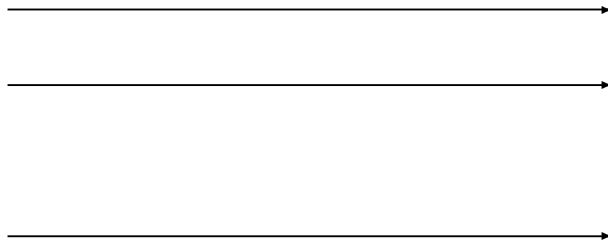
\_\_\_\_\_

- Algebraische Lösungsmethode:

**Aufgaben 6.2.**  $x \cdot (-2x + 3) \geq 0$

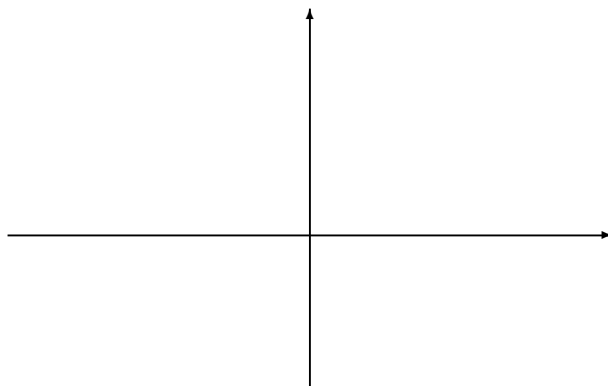
- *Löse algebraisch:*

- *Löse in der Kurzversion:*



Three horizontal lines with arrows at the end, intended for a short solution.

- *Verifiziere graphisch:*



**Aufgaben 6.3.** *Bestimme die Lösungsmenge für die folgende Ungleichung:*

$$x \cdot (x - 1) \cdot (2x + 8) > 0$$

**Aufgaben 6.4.** *Bestimme die Lösungsmenge für die folgende Ungleichung:*

$$x(x - 1)(-2x + 3)(4x - 5) \leq 0$$

**Aufgaben 6.5.** *Bestimme die Lösungsmenge für die folgende Ungleichung:*

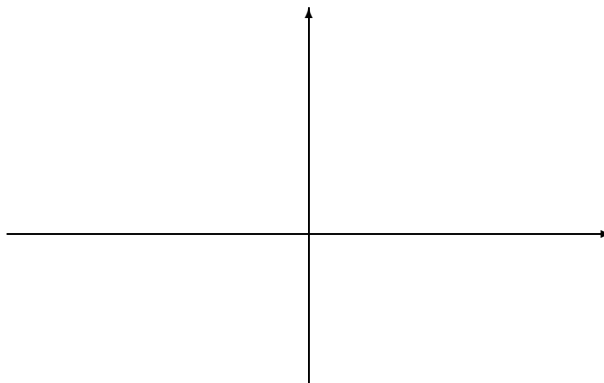
$$4x^3 + x^2 - 29x - 30 < 0$$

### 6.3 Mengentheoretische Betrachtungen in der $xy$ -Ebene

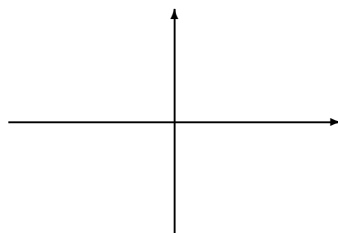
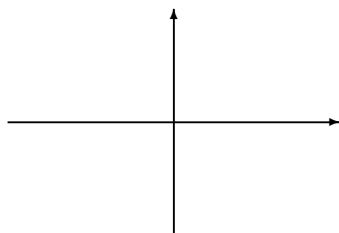
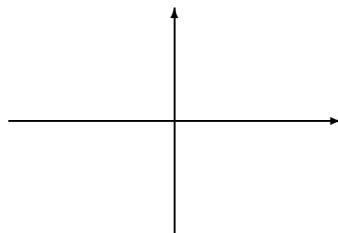
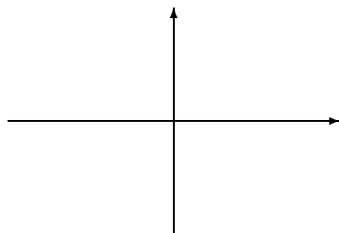
Wir wollen uns diesmal nicht nur der  $x$ -Achse, sondern der gesamten  $xy$ -Ebene zuwenden, mit dem Ziel, die *Menge aller Punkte* zu bestimmen, welche die Bedingung  $y < f(x)$ ,  $y > f(x)$  oder  $y = f(x)$  erfüllen.

**Beispiel 6.3.** Wir wollen die möglichen Fallunterscheidungen an folgender Ungleichung besprechen:

$$3x + 2y - 12 \leq 0$$

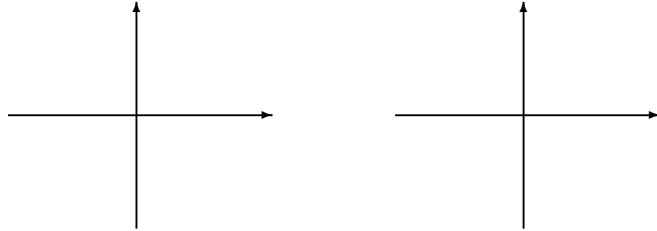


Allgemein gilt:

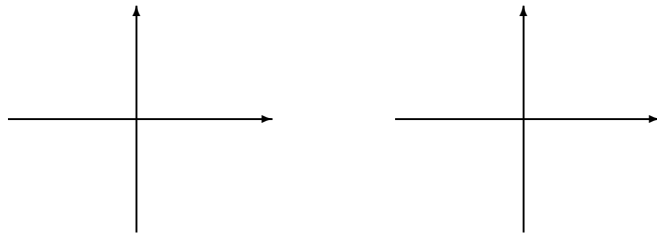


**Aufgaben 6.6.** *Skizziere die allgemeine Situation für die Fälle*

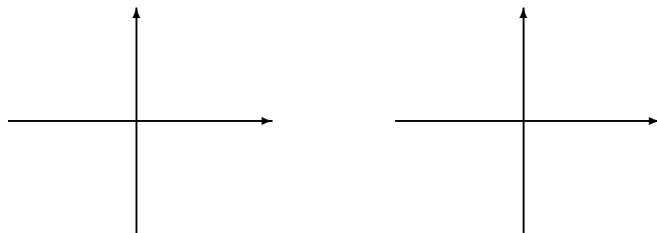
- $a > 0$  und  $b > 0$



- $a < 0$  und  $b > 0$

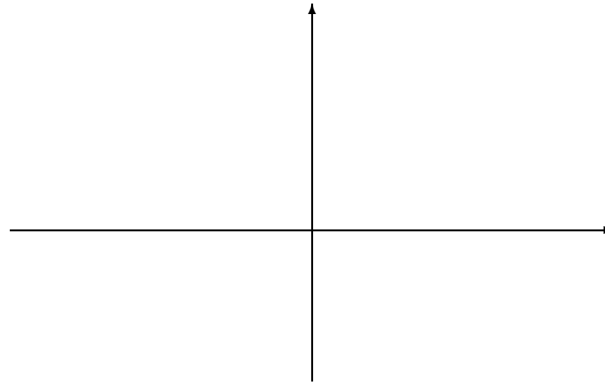


- $a < 0$  und  $b < 0$

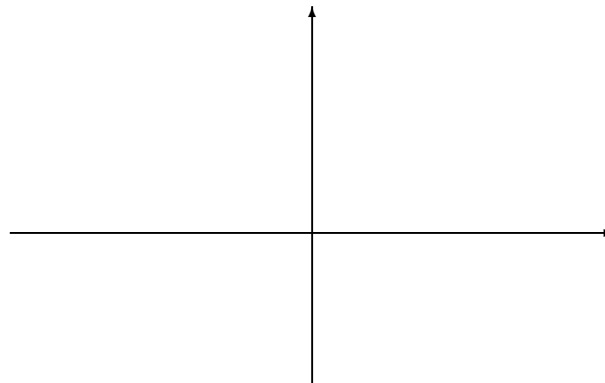


**Beispiel 6.4.** Stelle die Lösungsmenge der folgenden Systeme von linearen Ungleichungen graphisch dar:

1. (I)  $y < \frac{1}{2}x + 2$   
(II)  $y \leq -\frac{1}{2}x + 4$



2. (I)  $y < \frac{1}{2}x + 2$   
(II)  $y \leq -\frac{1}{2}x + 4$   
(III)  $y \leq -x + 6$   
(IV)  $y \geq 0$   
(V)  $x \leq 0$



Aufg.: 1 - 9 ; 1, 4b, 7a, 8a



## 6.4 Lineare Optimierung (mit zwei Variablen)

Die *lineare Optimierung* ist die klassische Anwendung aus dem Bereich der Systeme von Ungleichungen. Hierbei geht es darum eine *Zielfunktion* unter gegebenen *Nebenbedingungen* zu *optimieren* (d.h. maximieren/ minimieren).

Optimierungsaufgaben spielen in der Wirtschaft, Verwaltung und Technik eine bedeutende Rolle. Es geht darum, aus einer Vielzahl von möglichen Lösungen die unter bestimmten Bedingungen (den Nebenbedingungen) beste Lösung (die optimale Lösung) zu bestimmen.

Wir werden uns auf das Lösen von Optimierungsaufgaben mit höchstens zwei Variablen beschränken. (Probleme mit mehr als hundert Variablen sind in der Praxis keine Seltenheit, verlangen zur Lösung jedoch elektronische Hilfsmittel, da der Rechenaufwand schnell sehr gross wird.)

Wir beginnen mit einem rein mathematischen Problem:

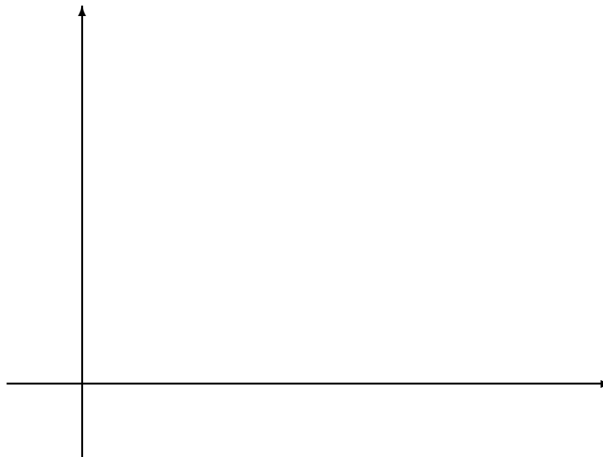
**Beispiel 6.5.** Für welche Wahl von  $x$  und  $y$  wird  $x + y$  maximal, unter folgenden Nebenbedingungen:

$$(I) \quad 2x + 5y \leq 20$$

$$(II) \quad 2x + y \leq 8$$

$$(III) \quad x \geq 0$$

$$(IV) \quad y \geq 0$$



**Beispiel 6.6.** Die Zielfunktion  $z = x + 2y$  soll minimal sein, unter den folgenden Nebenbedingungen:

$$(I) \quad x + y = 100$$

$$(II) \quad x + 3y \leq 240$$

$$(III) \quad 4x \leq 320$$

$$(IV) \quad x \geq 0$$

$$(V) \quad y \geq 0$$

**Aufgaben 6.7.** *Wir betrachten die Zielfunktion*

$$z = 2x + y$$

*unter folgenden Nebenbedingungen*

$$(I) \quad 2x + 6y \leq 300$$

$$(II) \quad 5x + 5y \leq 350$$

$$(III) \quad 6x \leq 300$$

- 1. Bestimme den Punkt, in welchem die Zielfunktion maximal ist.*
- 2. Bestimme das Minimum der Zielfunktion.*

Aufg.: 10 - 20 ; 10, 16, 19

(Beachte: das *Planungspolygon* entspricht den Nebenbedingungen)

### 6.4.1 Anwendungen

**Beispiel 6.7.** Ein Werk stellt zwei Fahrradtypen A und B her. Vom Typ A können täglich maximal 600 Stück fertiggestellt werden, vom Typ B maximal 300. Wegen Mangel an Personal sind jedoch nicht mehr als 750 Stück insgesamt möglich. Der Reingewinn für ein Fahrrad vom Typ A beträgt durchschnittlich Fr. 240.-, für ein Fahrrad vom Typ B Fr. 360.-.

1. Wie viele Fahrräder werden täglich von jedem Typ produziert, wenn der Reingewinn maximal sein soll und wie gross ist der Reingewinn?

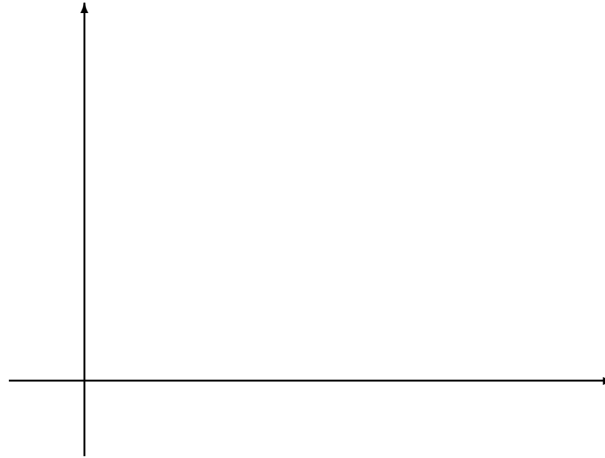
2. Wie ändert sich die Sachlage, wenn sich zusätzlich herausstellt, dass vom Typ B höchstens halb so viele Fahrräder verkauft werden können wie vom Typ A?  
Wie gross ist nun der Reingewinn?

**Beispiel 6.8.** Eine Firma produziert auf drei verschiedenen Automaten I, II und III zwei verschiedene Produkte A und B, mit dem Ziel, einen maximalen Gewinn zu erwirtschaften. Zur Verfügung stehen die folgenden Produktionszeiten und Gewinne pro Stück und verfügbaren Zeiten der Automaten:

	<i>Produkt A</i>	<i>Produkt B</i>	<i>Verfügbare Zeit</i>
<i>Automat I</i>	<i>3 min</i>	<i>6 min</i>	<i>360 min</i>
<i>Automat II</i>	<i>6 min</i>	<i>4 min</i>	<i>360 min</i>
<i>Automat III</i>	<i>6 min</i>	<i>–</i>	<i>300 min</i>
<i>Gewinn</i>	<i>Fr. 5.-</i>	<i>Fr. 6.-</i>	

1. Bestimme die Zielfunktion und die Nebenbedingungen.

2. Stelle die Situation graphisch dar.



3. Bestimme das Gewinnmaximum.

4. Erstelle einen Produktionsplan.

Aufg.: 21 - 30;

## 6.5 Weitere Anwendungen & Beispiele

Für weitere Aufgaben (und als Repetition noch einem kurzen Theorieteil zur Einführung des Begriffs der linearen Optimierung) verwenden wir das folgende Skript von Marcel Fischer:

### 1.8 lineare Optimierung

#### **Inhaltsverzeichnis**

1	Einführung des Begriffs „lineare Optimierung“	2
2	Das Planungspolygon	2
3	Die Optimierungsgerade	3

<http://www.marcelfischer2.ch/Skripte/KlasseCBaschung/Jahr1/18linOptimierung/18S.pdf>

und mit etwas technologischer Unterstützung:

[http://arthur.verlaghpt.at/php/online\\_links/links/LP\\_21554.pdf](http://arthur.verlaghpt.at/php/online_links/links/LP_21554.pdf)



## 6.6 Lineare Optimierung & MATHEMATICA

Als Grundlage zur Verwendung von MATHEMATICA im Zusammenhang mit der linearen Optimierung verwenden die folgende Projektstudie aus dem Jahr 2004 zum Thema:

*"Einsatz von Software zur Lösung linearer Optimierungsprobleme im Mathematikunterricht"*

(Evelyn Stephan (Prof. Dr. H.W. Hamacher; TU Kaiserslautern))

[Eine gekürzte Version ...](#)  
[reduziert auf die CAS-Anwendung mittels MATHEMATICA](#)

## 6.7 Der Simplexalgorithmus

... noch in Vorbereitung ...

## 6.8 *Meine Zusammenfassung*