Systeme linearer Ungleichungen

ALGEBRA Kapitel 6

WRProfil - Gymnasiale Mittelstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

14. Januar 2023

Die *QR* - Codes
zu den
Systemen linearer
Ungleichungen
WRProfil

zum aktuellen Skript

zur Homepage

zur Übersicht *Algebra*

zu den Systemen linearer Ungleichungen

Überblick über die bisherigen *ALGEBRA* - Themen:
(in den MNProfil-Versionen)

1 **Mengenlehre**

1.1 Die Menge im mathematischen Sinne

1.2 Darstellungsformen

1.3 Teilmengen

1.4 Rechnen mit Mengen

1.5 Mengen im Koordinatensystem

1.6 Rechnen in Mengen

1.7 Eine Gruppe - verschiedene Beispiele/Anwendungen

2 **Termumformungen**

2.1 Grundbegriffe

2.2 Einfache Beweisführungen in der Mathematik

2.3 Das Rechnen mit Polynomen

2.4 Das Rechnen mit Brüchen

Zur **Faktorzerlegung von Polynomen 2. Grades** -
eine Trilogie von **Lernaufgaben** *in vier Teilen*

Sie deckt die Kapitel 2.3 und 2.4 (ohne den Divisionsalgorithmus) ab.

Teil 1 Die Herleitung & Anwendung der Binomischen Formeln

Teil 2 Die Herleitung & Anwendung des Klammeransatzes

Teil 3 Anwendungen des in Teil 1 & 2 erlernten Wissens

3 **Gleichungslehre**

Teil 1

3.1 Aussagen, Aussageformen & Gleichungen

3.2 Das Lösen von Gleichungen

3.3 Lineare Gleichungen mit Parametern & deren Diskussion
3.3.3 Die Mächtigket der Lösungsmenge - *eine Lernaufgabe*

3.4 Die Lösungsverfahren für Bruchgleichungen

Teil 2

3.5 Quadratische Gleichungen
3.5.1 Bruchgleichungen & Biquadratische Gleichungen - *eine Lernaufgabe*

3.6 Textaufgaben - *ein Unterrichtspuzzle*

3.7 Der Satz von Vieta

3.8 Kubische Gleichungen

4 **Potenzen, Wurzeln & Logarithmen**

4.1 Einführung

4.2 Das Rechnen mit Potenzen

4.3 Potenzgleichungen

4.4 Der Logarithmus

4.5 Anwendungen

4.6 Weitere Beispiele & Anwendungen

5 **Lineare Gleichungssysteme**

5.1 Überblick

5.2 Lineare 2×2 Gleichungssysteme

5.3 Das Gauβ' sche Eliminationsverfahren

5.4 Lineare $n \times n$ Gleichungssysteme

5.5 Lineare $m \times n$ Gleichungssysteme

5.6 Lineare Gleichungssysteme mit Parameter

5.7 Textaufgaben

5.8 Matrizenkalkül

5.9 Mehrstufige Prozesse

Inhaltsverzeichnis

6 Systeme von linearen Ungleichungen **1**
6.1 Mengentheoretische Betrachtungen auf der x-Achse 1
6.2 Produkteungleichungen 4
6.3 Mengentheoretische Betrachtungen in der xy-Ebene 8
6.4 Lineare Optimierung (mit zwei Variablen) 10
6.4.1 Anwendungen 13
6.5 Weitere Anwendungen & Beispiele 17
6.6 *Meine* Zusammenfassung 18

6 Systeme von linearen Ungleichungen

In diesem Kapitel werden wir *lineare Ungleichungen*, *Produkteungleichungen* und *Systeme von linearen Ungleichungen* mengentheoretisch im Koordinatensystem betrachten, dazu geometrische und algebraische *Lösungsmethoden* entwickeln und das Kapitel mit der Diskussion von *linearen Optimierungsproblemen* abschliessen.

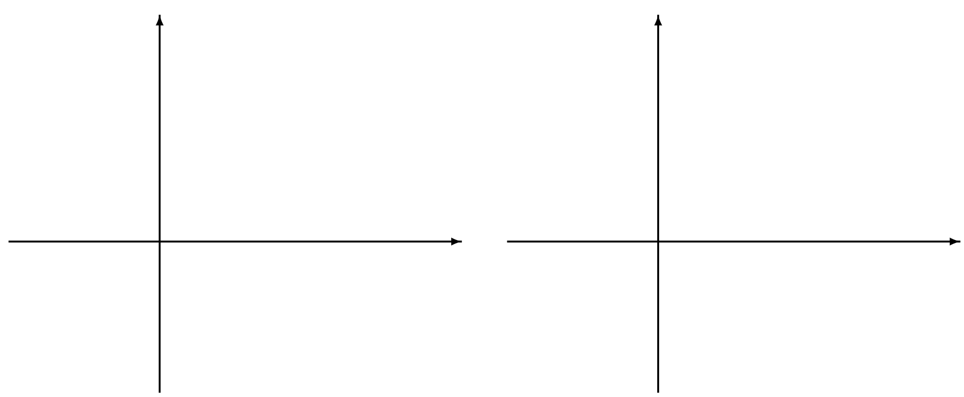
Begleitend wird wieder die Aufgabensammlung von

Deller/Gebauer/Zinn: *Algebra 1*, Verlag OrellFüssli

verwendet.

6.1 Mengentheoretische Betrachtungen auf der x-Achse

Wir wollen uns das Koordinatensystem mit den Graphen affiner Funktion mengentheoretisch betrachten, mit dem Ziel, die Menge der Argumente zu bestimmen, auf welcher der Funktionswert $<$, $>$ oder $= 0$ ist:

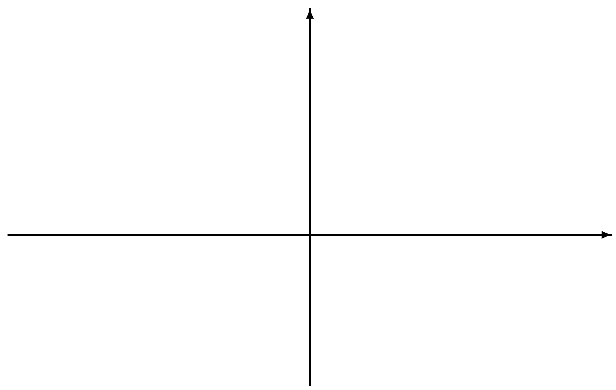


Der Definitionsbereich lässt sich disjunkt zerlegen ...

und entscheidend für diese Zerlegung sind: ...

Beispiel 6.1. Bestimme die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ für $\frac{3}{2}x - 3 < 0$

- mit Hilfe des Graphen im Koordinatensystem:

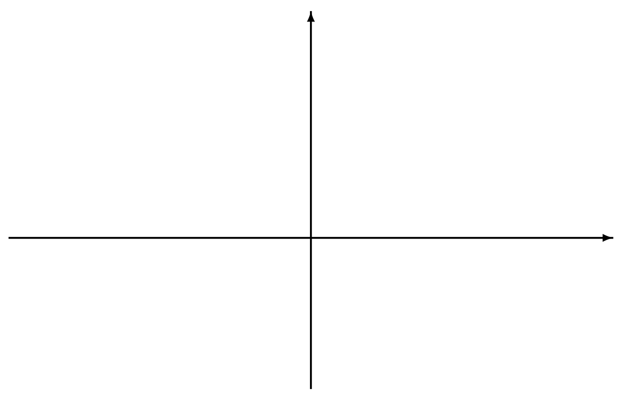


- Vereinfacht: (nur mit der x-Achse und der NS)

Aufgaben 6.1. *Bestimme die Lösungsmengen für die folgenden Ungleichungen:*

1. $0.75x - 1 < 0$
2. $0.3 - 3.2x \leq -2.7x - 1.9$

- *mit Hilfe der Graphen in einem Koordinatensystem:*



- *in der* Kurzversion:

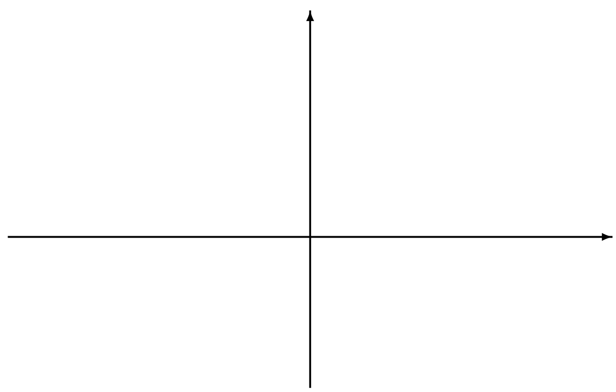
Bestimme abschliessend noch $\{x \in \mathbb{R} \mid (0.75x-1)(-0.5x+2.2) \begin{cases} > & 0 \\ = & 0 \\ < & 0 \end{cases} \}$

6.2 Produkteungleichungen

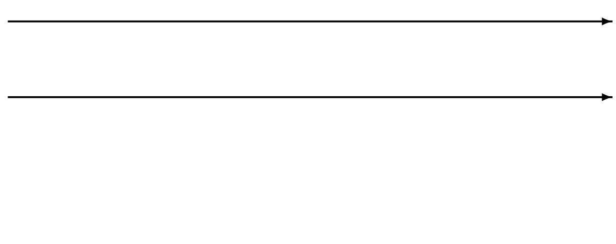
Wir können die bisherigen Betrachtungen auch auf das Lösen von *Produkteungleichungen* anwenden:

Beispiel 6.2. $(3x+5)(10-2x) < 0$

- Löse mit Hilfe des Graphen im Koordinatensystem:



- Löse in der Kurzversion:

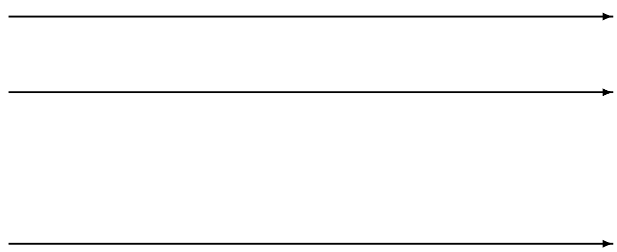


- Algebraische Lösungsmethode:

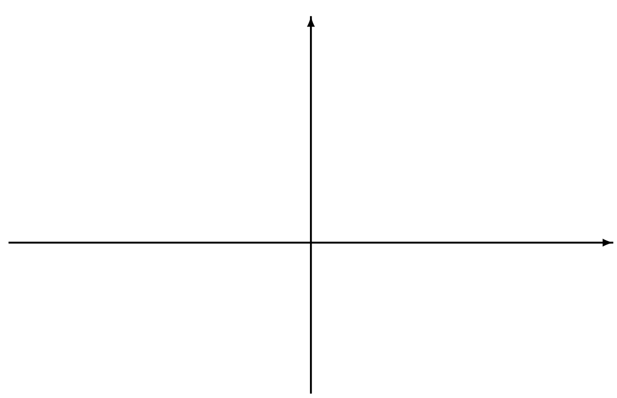
Aufgaben 6.2. $x \cdot (-2x + 3) \geq 0$

- *Löse algebraisch:*

- *Löse in der Kurzversion:*



- *Verfiziere graphisch:*



Aufgaben 6.3. *Bestimme die Lösungsmenge für die folgende Ungleichung:*

$$x \cdot (x-1) \cdot (2x+8) > 0$$

Aufgaben 6.4. *Bestimme die Lösungsmenge für die folgende Ungleichung:*

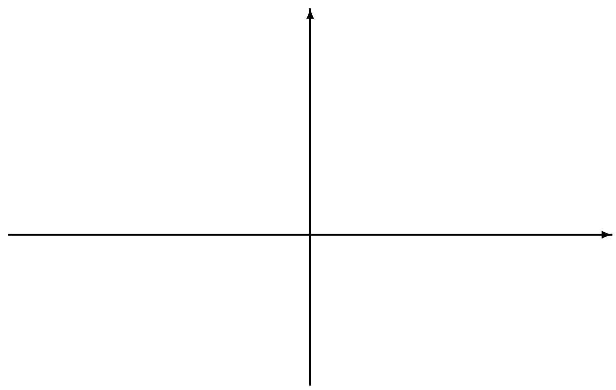
$$x(x-1)(-2x+3)(4x-5) \leq 0$$

6.3 Mengentheoretische Betrachtungen in der xy-Ebene

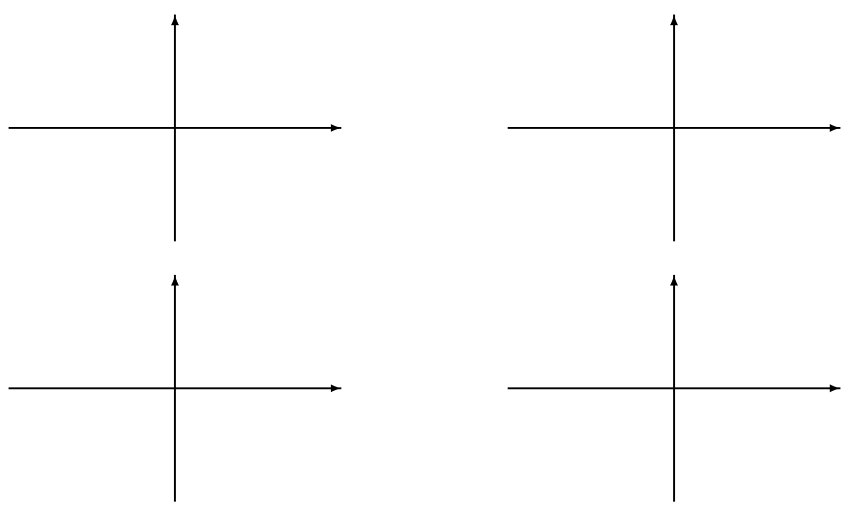
Wir wollen uns diesmal nicht nur der x-Achse, sondern der gesamten xy-Ebene zuwenden, mit dem Ziel, die *Menge aller Punkte* zu bestimmen, welche die Bedingung $y < f(x)$, $y > f(x)$ oder y $= f(x)$ erfüllen.

Beispiel 6.3. Wir wollen die möglichen Fallunterscheidungen an folgender Ungleichung besprechen:

$$3x + 2y - 12 \leq 0$$

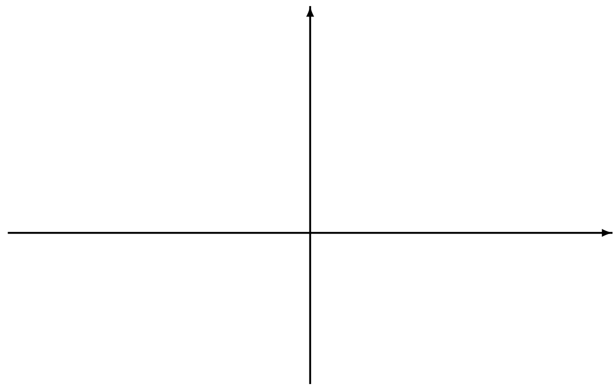


Allgemein gilt:

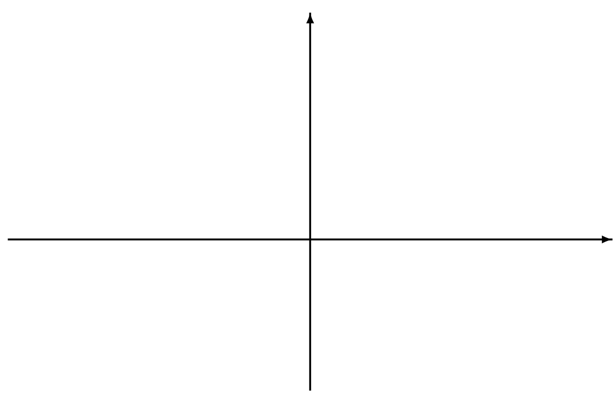


Beispiel 6.4. Stelle die Lösungsmenge der folgenden Systeme von linearen Ungleichungen graphisch dar:

1.
$$\begin{array}{lccl} \text{(I)} & y & < & \frac{1}{2}x + 2 \\ \text{(II)} & y & \leq & -\frac{1}{2}x + 4 \end{array}$$



2.
$$\begin{array}{lccl} \text{(I)} & y & < & \frac{1}{2}x + 2 \\ \text{(II)} & y & \leq & -\frac{1}{2}x + 4 \\ \text{(III)} & y & \leq & -x + 6 \\ \text{(IV)} & y & \geq & 0 \\ \text{(V)} & x & \leq & 0 \end{array}$$



Aufg.: 1 - 9 ; 1, 4b, 7a, 8a

6.4 Lineare Optimierung (mit zwei Variablen)

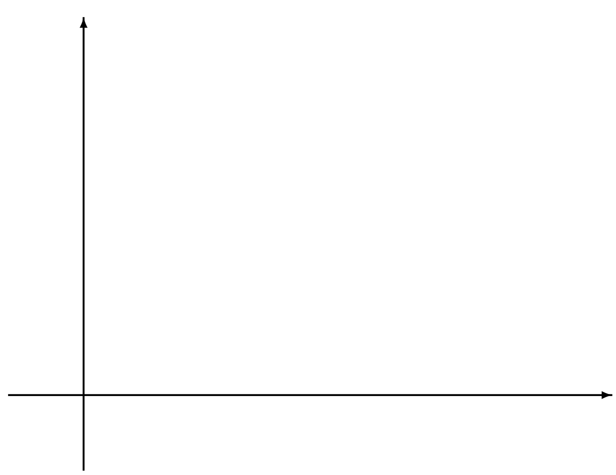
Die *lineare Optimierung* ist die klassische Anwendung aus dem Bereich der Systeme von Ungleichungen. Hierbei geht es darum eine *Zielfunktion* unter gegebenen *Nebenbedingungen* zu *optimieren* (d.h. maximieren/ minimieren).
Optimierungsaufgaben spielen in der Wirtschaft, Verwaltung und Technik eine bedeutende Rolle. Es geht darum, aus einer Vielzahl von möglichen Lösungen die unter bestimmten Bedingungen (den Nebenbedingungen) beste Lösung (die optimale Lösung) zu bestimmen.

Wir werden uns auf das Lösen von Optimierungsaufgaben mit höchstens zwei Variablen beschränken. (Probleme mit mehr als hundert Variablen sind in der Praxis keine Seltenheit, verlangen zur Lösung jedoch elektronische Hilfsmittel, da der Rechenaufwand schnell sehr gross wird.)

Wir beginnen mit einem rein mathematischen Problem:

Beispiel 6.5. Für welche Wahl von x und y wird $x + y$ maximal, unter folgenden Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) && 2x + 5y \leq 20 \\ &(\mathrm{II}) && 2x + y \leq 8 \\ &(\mathrm{III}) && x \geq 0 \\ &(\mathrm{IV}) && y \geq 0 \end{aligned}$$



Beispiel 6.6. Die Zielfunktion $z = x + 2y$ soll minimal sein, unter den folgenden Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} &\text{(I)} && x + y = 100 \\ &\text{(II)} && x + 3y \leq 240 \\ &\text{(III)} && 4x \leq 320 \\ &\text{(IV)} && x \geq 0 \\ &\text{(V)} && y \geq 0 \end{aligned}$$

Aufgaben 6.5. *Wir betrachten die Zielfunktion*

$$z = 2x + y$$

unter folgenden Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & 2x + 6y \leq 300 \\ \text{(II)} \quad & 5x + 5y \leq 350 \\ \text{(III)} \quad & 6x \leq 300 \end{aligned}$$

1. *Bestimme den Punkt, in welchem die Zielfunktion maximal ist.*

2. *Bestimme das Minimum der Zielfunktion.*

Aufg.: 10 - 20 ; 10, 16, 19

(Beachte: das *Planungspolygon* entspricht den Nebenbedingungen)

6.4.1 Anwendungen

Beispiel 6.7. Ein Werk stellt zwei Fahrradtypen A und B her. Vom Typ A können täglich maximal 600 Stück fertiggestellt werden, vom Typ B maximal 300. Wegen Mangel an Personal sind jedoch nicht mehr als 750 Stück insgesamt möglich. Der Reingewinn für ein Fahrrad vom Typ A beträgt durchschnittlich Fr. 240.-, für ein Fahrrad vom Typ B Fr. 360.-.

1. Wie viele Fahrräder werden täglich von jedem Typ produziert, wenn der Reingewinn maximal sein soll und wie gross ist der Reingewinn?

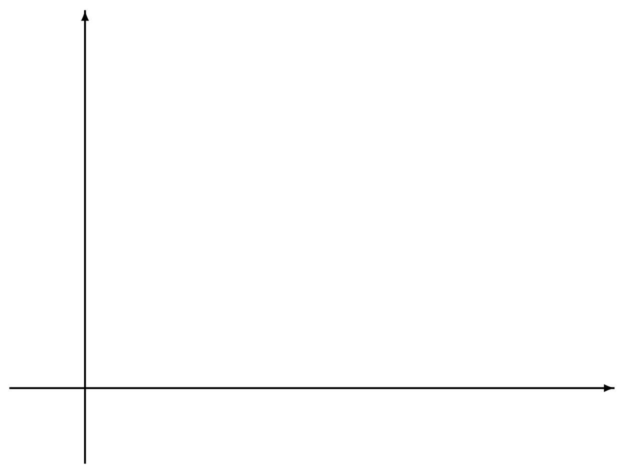
2. Wie ändert sich die Sachlage, wenn sich zusätzlich herausstellt, dass vom Typ B höchstens halb so viele Fahrräder verkauft werden können wie vom Typ A?
   Wie gross ist nun der Reingewinn?

Beispiel 6.8. Eine Firma produziert auf drei verschiedenen Automaten I, II und III zwei verschiedene Produkte A und B, mit dem Ziel , einen maximalen Gewinn zu erwirtschaften.
Zur Verfügung stehen die folgenden Produktionszeiten und Gewinne pro Stück und verfügbaren Zeiten der Automaten:

	Produkt A	*Produkt B*	*Verfügbare Zeit*
Automat I	*3 min*	*6 min*	*360 min*
Automat II	*6 min*	*4 min*	*360 min*
Automat III	*6 min*	–	*300 min*
Gewinn	*Fr. 5.-*	*Fr. 6.-*	

1. Bestimme die Zielfunktion und die Nebenbedingungen.

2. Stelle die Situation graphisch dar.



3. Bestimme das Gewinnmaximum.

4. Erstelle einen Produktionsplan.

Aufg.: 21 - 30;

6.5 Weitere Anwendungen & Beispiele

Für weitere Aufgaben (und als Repetion noch einem kurzen Theorieteil zur Einführung des Begriffs der linearen Optimierung) verwenden wir das folgende Skript von Marcel Fischer:

1.8 lineare Optimierung

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung des Begriffs „lineare Optimierung“ 2

2 Das Planungspolygon 2

3 Die Optimierungsgerade 3

http://www.marcelfischer2.ch/Skripte/KlasseCBaschung/Jahr1/18linOptimierung/18S.pdf

und mit etwas technologischer Unterstützung:

http://arthur.verlaghpt.at/php/online_links/links/LP_21554.pdf

6.6 *Meine* Zusammenfassung