Algebra-Aufgaben: *Beweisführung 1*

1. Untersuche die folgende Filmsequenz:
   http://www.youtube.com/watch?v=iKTCTy4UsUg

2. Negiere/ Verneine die folgenden Aussagen:

   $A := q \in \mathbb{N}$ $\neg A = q \notin \mathbb{N}$
   $B := r \geq 15$ $\neg B = r < 15$
   $C := 0 < p \leq 2$ $\neg C = p \leq 0 \vee p > 2$
   $D :=$ *s ist schwarz* $\neg D =$ s ist nicht schwarz
   $E :=$ *t ist negativ* $\neg E =$ t ist nicht negativ (Beachte: $\neq$ t ist positiv)
   $F :=$ *Jede Frau hat 10 Paar Schuhe* $\neg F =$ Es gibt Frauen, die haben mehr oder weniger als 10 Paar Schuhe
   $G :=$ *Kein Mann ist dooof* $\neg G =$ es existiert ein Mann der doof ist.
   Ein Mann ist doof
   Alle Männer sind doof

$\forall x \in X: \neg H(x) \Leftrightarrow \exists x \in X: H(x)$
$\exists x \in X: \neg H(x) \Leftrightarrow \forall x \in X: H(x)$

3. Drücke in Worte aus und verneine:

   (a) $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ Für alle n aus $\mathbb{N}$ gilt die Eigenschaft A
   $\exists n \in \mathbb{N} : \neg A(n)$

   (b) $\exists n \in \mathbb{N} : B(n)$ Es existiert ein n aus $\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft B
   $\forall n \in \mathbb{N} : \neg B(n)$

c) $\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \vee B(n)$
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \neg A(n) \wedge \neg B(n)$

d) $\exists n \in \mathbb{N}: B(n) \wedge A(n)$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \neg B(n) \vee \neg A(n)$

4. Wie abstrahieren die folgende Aussage:

   Alle Mathematiklehrer sind gut.

$$\forall x \in X : E(x)$$

Erkläre die Bedeutungen von

(a) x, Math. Lehrer
(b) X, Menge aller Math. Lehrer
(c) $E(x)$ Eigenschaft "gut"

und verneine die Aussage: $\exists x \in X: \neg E(x)$

(es existiert ein Math. Lehrer, der nicht gut ist)

5. Wir abstrahieren die folgende Aussage: Math.

Unter allen MathematiklehrerInnen gibt es keinen Lehrer der schlecht ist.

$$\forall x \in X : (\nexists y \in Y : \neg F(x, y)$$

Erkläre die Bedeutungen von

(a) x, = Math. LehrerIn
(b) X, Menge aller Math. LehrerInnen
(c) Y, Menge aller Math. Lehrer
(d) $F(x, y)$ Eigenschaft 'nicht-schlecht'

und verneine die Aussage: $\exists x \in X : (\exists y \in Y : \neg F(x,y))$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr:

✓ $Y \subset X$	f $X \subset Y$	f $Y \in X$
$X \in Y$ f	$x \in Y$ f	$y \in X$ w

6. Erstelle die Wahrheitstabellen für folgende ~~Junktionen~~: Aussagen:

(a) $A \vee (\neg B)$
(b) $(\neg A) \wedge B$
(c) $A \Rightarrow B$
(d) $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

$(\neg A) \vee B$ $\quad B \vee (\neg A)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$(\neg A) \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
w	f	f	w	w	f	f	f
w	w	f	f	w	f	w	w
f	f	w	w	w	f	w	w
f	w	w	f	f	w	w	w

7. Bestimme die notwendigen Wahrheitswerte von A und B, damit folgendes gilt:

(a) $A \wedge B$ ist wahr, $(A, w), (B, w)$
(b) $(\neg A) \vee B$ ist falsch, $(A, w), (B, f)$
(c) $A \wedge (\neg B)$ ist wahr, $(A, w), (B, f)$
(d) $A \vee B$ ist falsch. $(A, f), (B, f)$

8. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) *Die Konjunkton ist kommutativ*
(b) $A \vee (B \wedge C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

a)

A	B	A	$A \vee B$	$B \vee A$
w	w	w	w	w
w	f	w	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	f

9. Wir definieren neu das **ausschliessliche oder** (entweder oder):

$$A \triangle B := (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

Bestimme den Wahrheitswert für $A \triangle B$, unter der Voraussetzung, dass A und B falsch sind.

A	B	$A \wedge \neg B)$	$(\neg A) \wedge B$	$A \triangle B = \ldots \vee \ldots$	
W	F	W	F	W	
W	W	F	F	F	
F	F	F	F	F	F
F	W	F	W	W	