Algebra-Aufgaben · Komplexe Zahlen 1

①

a) $2x + 6 = p(p-1) - xp$

$\Leftrightarrow 2x + xp = p^2 - p - 6$

$\Leftrightarrow x(2+p) = (p-3)(p+2)$

$\Rightarrow$ · $\exists!$ Lösg $\Leftrightarrow 2+p \neq 0$

$\Leftrightarrow p \neq -2 \Rightarrow x = p-3$

· $\mathbb{L} = \{\}$ $\Leftrightarrow 2+p = 0 \wedge (p-3)(p+2) \neq 0$

$\Leftrightarrow (p = -2) \wedge (p \neq 3 \wedge p \neq -2)$ ↯

$\Rightarrow$ dieser Fall ist nicht möglich!

· $\mathbb{L} = \mathbb{C} \Leftrightarrow p = -2 \wedge (p = 3 \vee p = -2)$

$\Leftrightarrow p = -2$

b) $q^2x - q = 1 - x(q+1)$

$\Leftrightarrow q^2x + qx + x = q + 1$

$\Leftrightarrow (q^2+q+1)\cdot x = q+1$

$\Rightarrow$ · $\exists!$ Lösg $\Leftrightarrow q^2+q+1 \neq 0$

$\Leftrightarrow q_{1,2} \neq \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} \notin \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ hat in $\mathbb{R}$ immer genau eine Lösg.

· $\mathbb{L} = \{\} \wedge \mathbb{L} = \mathbb{C}$ in $\mathbb{R}$ nicht möglich

② in $\mathbb{N}$: $\mathbb{L} = \{\}$, in $\mathbb{Z}$: $\mathbb{L} = \{-5\}$, in $\mathbb{Q}$: $\mathbb{L} = \{-5\}$

in $\mathbb{R}$: $\mathbb{L} = \{-5, \pm\sqrt{5}\}$, in $\mathbb{C}$: $\mathbb{L} = \{-5, \pm\sqrt{5}, \pm i\sqrt{5}\}$

③ Ist gerader sind definiert für positive Basen

④ Beweis:

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{(-1+i\sqrt{3})^3}{2^3}$$

$$= \frac{(-1)^3 + 3\cdot(-1)^2\cdot i\sqrt{3} + (-1)(i\sqrt{3})^2 + (i\sqrt{3})^3}{8}$$

$$= \frac{(-1) + 3i\sqrt{3} + 9 - 3i\sqrt{3}}{8} = 1$$

□

⑤ Beh.: $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$

Beweis: $\iff \sqrt{1+\sqrt{3i^2}} + \sqrt{1-\sqrt{3i^2}} \overset{!}{=} \sqrt{6}$

$\Rightarrow 1+i\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{1+\sqrt{3i^2}}\cdot\sqrt{1-\sqrt{3i^2}} + 1-i\sqrt{3} \overset{!}{=} 6$

$\iff 2 + 2\cdot\sqrt{(1+\sqrt{3i^2})(1-\sqrt{3i^2})} = 6$

$\iff 2\cdot\sqrt{1^2-3i^2} = 4$

$\iff 2\cdot\sqrt{4} = 4$

⑥ · „Probieren" $\Rightarrow x_1 = 2$

· Abspalten der Lösung x_1:

$(x^3-6x+4):(x-2) = x^2+2x-2 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-2\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-2)}}{2} = -1\pm\sqrt{3}$

$-(x^3-2x^2)$

$2x^2-6x+4$

$-(2x^2-4x)$

$-2x+4$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{2, -1\pm\sqrt{3}\}$

· Die Cardanische Formel liefert:

$x^3-6x+4 = x^3+px+q$

$\iff p=-6,\ q=4$

$x = \sqrt[3]{-2+\sqrt{4-8}} + \sqrt[3]{-2-\sqrt{4-8}}$

$= \sqrt[3]{-2+\sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-2-\sqrt{-4}}$

$= \sqrt[3]{-2+2\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-2-2\sqrt{-1}}$

$= \sqrt[3]{-2+2i} + \sqrt[3]{-2-2i}$

Beh.: $x = \sqrt[3]{-2+2i} + \sqrt[3]{-2-2i} = 2$

Beweis: Tipp: $(1+i)+(1-i) = 2$

$\iff \sqrt[3]{(1+i)^3} + \sqrt[3]{(1-i)^3} = 2$

$\iff \sqrt[3]{1+3i+3i^2+i^3} + \sqrt[3]{1-3i+3i^2-i^3} = 2$

$\iff \sqrt[3]{1+3i-3-i} + \sqrt[3]{1-3i-3+i} = 2$

$\iff \sqrt[3]{-2+2i} + \sqrt[3]{-2-3i} = 2$

Beweis: $x = \sqrt[3]{-2+2i} + \sqrt[3]{-2-2i}$

$= \sqrt[3]{(1+i)^3} + \sqrt[3]{(1-i)^3}$

$= (1+i)+(1-i) = 2$ □

(7) $x^3+x^2+x = -1 \iff \underline{x^3+x^2+x+1 = 0}$

a) mit Probieren: $x_1 = -1$ $\Rightarrow$ abspalten: $(x^3+x^2+x+1):(x+1) = x^2+1$

$-(x^3+x^2)$

$x+1$

$\Rightarrow x_{2,3} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-1, \pm i\}$

b) mit Cardano: Setze $x = t - \frac{1}{3}$

subst. $\Rightarrow (t-1/3)^3 + (t-1/3)^2 + (t-1/3) + 1 = 0$

$\iff t^3 - t^2 + 1/3 \cdot t - 1/27 + t^2 - 2/3\, t + 1/9 + t - 1/3 + 1 = 0$

$\iff t^3 + 2/3 \cdot t + 20/27 = 0$

$\Rightarrow t = \sqrt[3]{-\frac{20}{2\cdot 27} + \sqrt{\left(\frac{20}{2\cdot 27}\right)^2 + \left(\frac{2}{3\cdot 3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{20}{54} - \sqrt{\left(\frac{20}{54}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^3}}$

$\cong 0.244 + (-0.911)$

$= -0.667$

$\Rightarrow x = t - 1/3 = -1$

⑧ f) $4x^6 + 21x^4 + 21x^2 + 4 = 0$

$\overset{\text{Subst.}}{\underset{r := x^2}{\iff}} \quad 4r^3 + 21r^2 + 21r + 4 = 0$

$\overset{\text{Subst.}}{\iff} \quad (t - 7/4)^3 + 21/4 \cdot (t - 7/4)^2 + 21/4 \cdot (t - 7/4) + 1 = 0$

$r = t - \frac{21/4}{3}$

$= t - 7/4$

$\iff t^3 - 21/4 \cdot t^2 + 3 \cdot 49/16\, t - 343/64 + 21/4 \cdot t^2 - 21/4 \cdot 14/4\, t + 21/4 \cdot 49/16 + 21/4 \cdot t - 147/16 + 1 = 0$

$\iff t^3 - 63/16\, t + 162/64 = 0$

Cardano

$\Rightarrow t_1 = \sqrt[3]{-\frac{162}{2 \cdot 64} + \sqrt{\left(\frac{162}{2 \cdot 64}\right)^2 + \left(\frac{-63}{3 \cdot 16}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{162}{128} - \sqrt{\left(\frac{162}{128}\right)^2 + \left(\frac{-63}{48}\right)^3}}$

$= \sqrt[3]{-81/64 + 15/32 \sqrt{3} i} + \sqrt[3]{-81/64 - 15/32 \cdot \sqrt{3} i}$

$= \sqrt[3]{\frac{30\sqrt{3} i - 81}{64}} + \sqrt[3]{\frac{-30\sqrt{3} i - 81}{64}}$

$= 1/4 \cdot \left(\sqrt[3]{30\sqrt{3} i - 81} + \sqrt[3]{-30\sqrt{3} i - 81} \right)$

⋮

Sonst: 'probiert' in (*) $\Rightarrow r_1 = (-1)$

$\Rightarrow (4r^3 + 21r^2 + 21r + 4) : (r + 1) = 4r^2 + 17r + 4$

$-(4r^3 + 4r^2)$

$17r^2 + 21r + 4$

$-(17r^2 + 17r)$

$4r + 4$

$\Rightarrow r_{2,3} = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4}$

$= \frac{-17 \pm \sqrt{225}}{8}$

$\Rightarrow r_2 = -1/4, \ r_3 = -4$

$\Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{r_1} = \pm i$

$x_{3,4} = \pm i/2$

$x_{5,6} = \pm 2i$