Algebra-Aufgaben: Komplexe Zahlen 3

Bem.: Es sei jeweils: $z := r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$

① a) Beh. $\bar{\bar{z}} = z$

Beweis: $z = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$

$\Rightarrow \bar z = \overline{r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)} = r\cdot(\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi)$

$\Rightarrow \bar{\bar z} = \overline{r\cdot(\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi)} = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) = z$ □

b) Beh.: $z\cdot\bar z \geq 0$

Beweis: $z\cdot\bar z = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)\cdot r\cdot(\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi)$

$= r^2\cdot(\cos^2\varphi - i\cdot\sin\varphi\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi\cos\varphi - i^2\sin^2\varphi)$

$= r^2\cdot(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$

$= r^2 \geq 0, \quad \forall r\in\mathbb{R}$ □

c) Beh.: $\overline{z+w} = \bar z + \bar w$

Beweis: $\overline{z+w} = \overline{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1) + r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2)}$, mit $z = r_1\cdot \operatorname{cis}\varphi_1$, $w = r_2\cdot\operatorname{cis}\varphi_2$

$= \overline{r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2 + i\cdot(r_1\sin\varphi_1 + r_2\cdot\sin\varphi_2)}$

$= r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2 - i\cdot(r_1\sin\varphi_1 + r_2\cdot\sin\varphi_2)$

$= r_1\cos\varphi_1 - r_1\cdot i\cdot\sin\varphi_1 + r_2\cdot\cos\varphi_2 - r_2\cdot i\cdot\sin\varphi_2$

$= r_1\cdot(\cos\varphi_1 - i\cdot\sin\varphi_1) + r_2\cdot(\cos\varphi_2 - i\cdot\sin\varphi_2)$

$= \bar z + \bar w$ □

d) Beh.: $\overline{z\cdot w} = \bar z\cdot\bar w$

Beweis: $\overline{z\cdot w} = \overline{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2)}$

$= \overline{r_1r_2\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2\cos\varphi_1 + i^2\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)}$

$= \overline{r_1r_2\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + i\cdot(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)}$

$= r_1r_2\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 - i\cdot(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cdot\cos\varphi_1)$

$\bar z\cdot\bar w = \overline{r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)}\cdot\overline{r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2)}$

$= r_1\cdot(\cos\varphi_1 - i\cdot\sin\varphi_1) + r_2\cdot(\cos\varphi_2 - i\cdot\sin\varphi_2)$

$= r_1r_2\cdot(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cdot\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - i\cdot\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2)$

$= r_1r_2\cdot(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 - i\cdot(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_2\cdot\sin\varphi_1)$

□

e) Beh. $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

Beweis $\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) + r\cdot(\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi)}{2}$

$= \frac{2r\cos\varphi}{2} = r\cos\varphi = \underline{Re(z)}$ $\square$

f) Beh. $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Beweis $\frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) - r\cdot(\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi)}{2i}$

$= \frac{2r\cdot i\cdot\sin\varphi}{2i} = r\cdot\sin\varphi = \underline{Im(z)}$ $\square$

g) Beh. $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\cdot(\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi)$

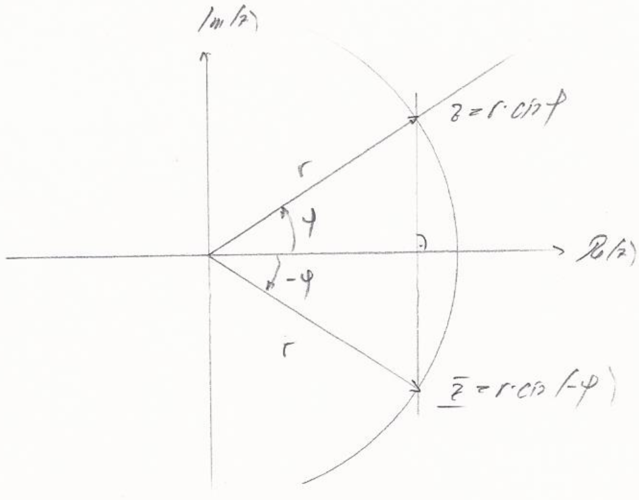
Beweis $\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\cdot\frac{\bar{z}}{\bar{z}}$

$= \frac{1\cdot r\cdot(\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi)}{r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)\cdot r\cdot(\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi)}$

$= \frac{r\cdot(\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi - i^2\sin^2\varphi)}$

$= \frac{r\cdot(\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \underline{\frac{1}{r}\cdot(\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi)}$ $\square$

2) $z \xrightarrow[\text{der Reellen-Achse}]{\text{gespiegelt an}} \bar{z}$



$\bar{z} = r\cdot\text{cis}(-\varphi) = r\cdot(\cos(-\varphi) + i\cdot\sin(-\varphi))$

$= r\cdot(\cos\varphi + i\cdot(-1)\cdot\sin\varphi)$

$= \underline{r\cdot(\cos\varphi - i\cdot\sin\varphi)}$

a) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, Re(z) = 1\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, 1 \leq Re(z) \leq 5 \wedge 1 \leq Im(z) \leq 3\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, Re(z) \leq 0\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, -2 \leq Im(z) \leq 0\}$

e) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, Im(z) + Re(z) = 1\}$

f) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, |Im(z)| = 2$