Lineare Abbildungen

LINEARE ALGEBRA

AM - Gymnasiale Oberstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

30. Juli 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Überblick & Zielsetzung

Das **Ziel** dieses Kapitels ist die Darstellung von linearen Abbildungen in der Ebene und im Raum durch Matrizen und die Untersuchung dieser Abbildungen auf ihre geometrischen und algebraischen Eigenschaften hin.
Abgeschlossen wird mit der Diskussion des Äquivalenzsatzes für orthogonale Gruppen.

Im Folgenden wird der Aufbau dargestellt und werden die Quellen angegeben, mit welchen

- einerseits die notwendigen Grundlagen im Matrizenkalkül erarbeitet werden können (oder schon worden sind), um dessen Anwendungen im Zusammenhang mit linearen Abbildungen sicher handhaben zu können

  und

- andererseits die geometrischen Abbildungen hergeleitet und diskutiert werden.

Die Unterlagen werden jeweils zur Verfügung gestellt und nach einer Einarbeitung mit oder durch die SchülerInnen im Klassenverband ausführlich diskutiert. Die zugehörigen Fragenstellungen sind in der Beantwortung meist aufwendig und daher in Gruppen und auch häufig während der Unterrichtszeit zu lösen (und gegebenenfalls zu präsentieren).

Eine aktive Mitarbeit wird von den SchülerInnen verlangt und gilt auch als Voraussetzung für den Besuch des Schwerpunktfaches Anwendungen der Mathematik.

2 Vorkenntnisse und Anwendungen

Wir bauen auf, auf die erarbeiteten ***Vorkenntnisse*** aus den Grundlagen der Mathematik des MN-Profils,

Lineare Gleichungssysteme

ALGEBRA Kapitel 5

MNProfil - Gymnasiale Mittelstufe

insbesondere zu

5.8 **Matrizenkalkül**

- *Definitionen & Begriffe*
- *Rechenoperationen &*
  der Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen
- *Die Inverse einer Matrix*
  - Definition,
  - Bedeutung & Eigenschaften,
  - Berechnung der Inversen.
- *Determinante*
  - Begriff der Linearität,
  - Determinantenfunktion -
    alternierend, multilinear & den daraus folgenden Eigenschaften,
  - Bedeutung und Berechnung der Determinante mit dem Gauss-Algorithmus.
- *Matrizen & Mathematica*

2.1 Repetition

2.2 Anwendungen Mathematica

Zur Unterstützung die folgenden Skripte:

- Matrizenrechnung - die Grundbefehle mit Mathematica
- der LinearSolve

2.3 Anwendungen Mehrstufige Prozesse

Mehrstufige Prozesse sind dadurch gekennzeichnet, dass eine durch einen *Zustandsvektor* beschriebene Startsituation Schritt für Schritt mit Hilfe von *Übergangsmatrizen* in Folgesituationen überführt wird. Dabei kann diese Überführung durch von Stufe zu Stufe verschiedene Matrizen (z.B. Materialverflechtungen) oder durch das mehrfache Anwenden ein und derselben Matrix erfolgen (z.B. Populationsentwicklungen).

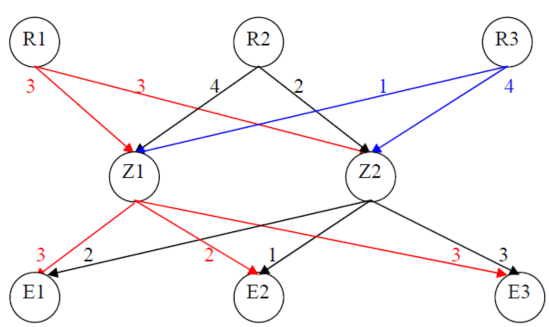
Als Quelle verwenden wir die Unterlagen von

J. Bemetz: *Materialen zu Mehrstufigen Prozesse*,
Martin-Heidegger-Gymnasium Meβkirch

Wir werden uns an den folgenden drei Beispielen mit der Thematik vertraut machen:

- *Materialverflechtung*

  In einem Produktionsprozess werden zur Herstellung von 2 Zwischenprodukten Z1 und Z2 drei verschiedene Rohstoffe R1, R2, und R3 benötigt. Aus den beiden Zwischenprodukten entstehen dann 3 verschiedene Endprodukte E1, E2 und E3.
  Der untenstehenden Figur kann entnommen werden, wieviel Mengeneinheiten der Rohstoffe für die jeweiligen Zwischenprodukte und wieviel Mengeneinheiten der Zwischenprodukte für die jeweiligen Endprodukte benötigt werden.
  Gesucht ist der Rohstoffbedarf für die verschiedenen Endprodukte.



Diskussion der Lösung:

Alternativer Zugang:

Weitere Beispiele und Erklärungen sind zu finden unter
http://www.dieter-heidorn.de/ ...

- Weitere Beispiele:

  1. *Eine Zweistufige Produktion*

     unter docplayer.com/ ...

  2. *Medikamentenherstellung*

     unter docplayer.com/ ...

  3. *Kosten & Gewinne* - eine Abituraufgabe

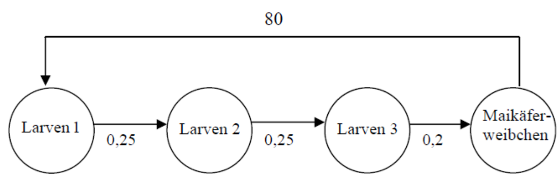
     unter docplayer.com/ ...

  4. *Aufgaben B0513* ohne Aufgabe f)

     unter docplayer.com/ ...

- *Maikäferpopulation*

  Ein Maikäferweibchen legt 80 Eier und stirbt bald danach. Von den sich daraus entwickelnden Larven (Engerlinge) überleben nur ein Viertel das darauffolgende Jahr. Auch im zweiten Jahr überleben nur ein Viertel der Larven. Im dritten Jahre verpuppen sich die Larven und aus einem Fünftel von ihnen entwickeln sich im folgenden Jahr Maikäferweibchen, die wieder 80 Eier legen.

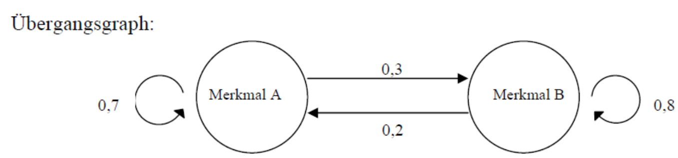
  

  Wir untersuchen die Entwicklung einer Startpopulation aus 6000 Larven 1, 2000 Larven 2, 300 Larven 3 und 500 Käfernweibchen.

Diskussion der Lösung:

- *Vererbung von Merkmalen*

  Eine Population von Insekten enthält Tiere mit zwei verschiedenen Merkmalen A und B (z.B. Farbe). Beobachtungen über längere Zeit zeigen, dass Insekten mit Merkmal A zu 70% Nachkommen mit Merkmal A und zu 30% solche mit Merkmal B haben. Insekten mit Merkmal B haben zu 80% wieder Nachkommen mit diesem Merkmal, zu 20% solche mit Merkmal A. Die Vermehrungsrate wird durch die Merkmale nicht beeinflusst.

  $x_A(0)$ sei der Anteil der Insekten mit Merkmal A zu Beobachtungsbeginn, $x_B(0)$ entsprechend derjenige mit Merkmal B.

Diskussion der Lösung:

Algebra-Aufgaben: *Matrizenkalkül C*
(Zugehörige Lösungen)

Algebra-Aufgaben: *Matrizenkalkül D*
(Zugehörige Lösungen)

3 Anwendungen der Determinante

Wir schauen uns als eine erste Anwendung den Zusammenhang zwischen dem Flächenerhalt und der Determinante am Beispiel eines Parallelogramms im $\mathbb{R}^2$:

Als Vorlage verwenden wir:

LINEARE ABBILDUNGEN
von Sven Blumberg
28.02.2001

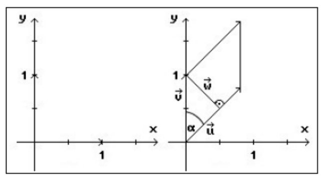


Abbildung 1.9: Das von den Bildern der Einheitsvektoren aufgespannte Parallelogramm

Satz 1.4.9. *Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei verschiedene Vektoren, dann gilt für den von ihnen eingeschlossenen Winkel α*

$$\cos(\alpha) = \frac{< \vec{u}, \vec{v} >}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \tag{1.74}$$

Nun also können wir also den Flächeninhalt des Parallelogramms berechnen. Für die Höhe auf dem Vektor $\vec{u}$ können wir die Definition des Sinus anwenden, denn es gilt

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|} \tag{1.75}$$

bzw.

$$|\vec{w}| = |\vec{v}| \cdot \sin(\alpha) \tag{1.76}$$

damit erhalten wir also insgesamt (wir quadrieren direkt um hinterher die Wurzeln zu vermeiden)

$$\begin{aligned}
A^2 &= |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \sin^2(\alpha) && (1.77)\\
&= |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot (1 - \cos^2(\alpha)) && (1.78)\\
&= |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot -|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot \cos^2(\alpha)) && (1.79)\\
&= |\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2 \cdot - < \vec{u}, \vec{v} >^2 && (1.80)\\
&= (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2 && (1.81)\\
&= u_1^2 v_1^2 + u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 + u_2^2 v_2^2 - (u_1^2 v_1^2 + 2 u_1 v_1 u_2 v_2 + u_2^2 v_2^2) && (1.82)\\
&= u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 - 2 u_1 v_1 u_2 v_2 && (1.83)\\
&= (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 && (1.84)
\end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen erhalten wir also A = $|u_1 v_2 - u_2 v_1|$. Dies ist aber gerade die Determinante der zugehörigen Matrix, da die Bilder der Einheitsvektoren in den Spalten der Matrix stehen. Also bleibt der Flächeninhalt erhalten, wenn die Determinante der darstellenden Matrix 1 oder -1 ist.

Aufgaben 3.1 *Repetiere das* Spatprodukt

3.1 Weitere Eigenschaften der Determinante (*ohne* Herleitungen)

4 Die Bilder der Basisvekoren in der Abbildungsmatrix

Wir arbeiten hierfür mit einem Auszug aus dem Skript von

Urs Stammbach
Lineare Algebra

5 Lineare Abbildungen der Geometrie & deren Darstellung durch Matrizen

Als Vorlage verwenden wir einen Auszug aus

Lineare Algebra
R. Manz
ZHAW 2012

Wir diskutieren aus dem Kapitel **6 Spezielle lineare Abbildungen** ...:

5.1 ***Spiegelungen*** , Manz-Originalkapitel 6.1 , davon ...

5.1.1 ***Spiegelungen an der x- und y-Achse*** , Manz-Originalkapitel 6.1.3

5.1.2 ***Spiegelungen im Ursprung*** , Manz-Originalkapitel 6.1.4

5.2 ***Streckungen*** , Manz-Originalkapitel 6.2

5.3 ***Scherungen*** , Manz-Originalkapitel 6.3

5.4 ***Drehungen*** , Manz Originalkapitel 6.4 , davon ...

5.4.1 ***Drehungen in der Ebene*** , Manz Originalkapitel 6.4.1

***AM* Algebra-Aufgaben:** *Lineare Abbildungen 1*

5.4.2 ***Drehungen im Raum*** , Manz-Originalkapitel 6.4.2

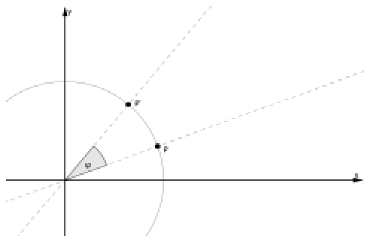
***AM* Algebra-Aufgaben:** *Lineare Abbildungen 2*

- Gruppeneigenschaften der Drehmatrizen,
- Untersuche die Abbilungen auf Längen- & Winkeltreue,
- Alternative zur Zerlegung im Skript, für die Herleitung der Drehmatrix um eine beliebige Drehachse im Raum (Beispiel 6.7),
- Alternative Zerlegung mit *GeoGebra* visualisieren und rechnerisch kontrollieren,
- Alternative Zerlegung mit *Mathematica* visualsieren und rechnerisch kontrollieren (unter Verwendung von u.a. den Befehlen Map, ListPlot, Show, ...
-

5.5 Herleitung der Drehmatrix im $\mathbb{R}^2$, nach Sascha Pucillo

Herleitung der Drehmatrix im $\mathbb{R}^2$

Repetition

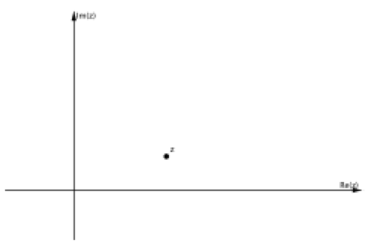


Die Drehung im $\mathbb{R}^2$ lässt sich durch folgende Matrix beschreiben:

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

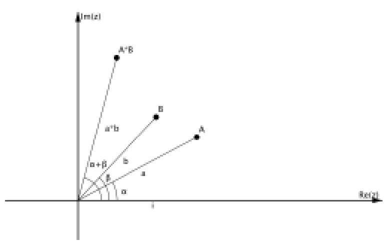
$$\overrightarrow{OP'} = D_\varphi * \overrightarrow{OP}$$

Betrachtung in der Gaußschen Zahlenebene



Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ wird in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt, indem der Realteil $Re(z)$ und der Imaginärteil $Im(z)$ als Abszisse bzw. Ordinate betrachtet werden. Die cis-Darstellung $a * cis(\varphi)$ entspricht den Polarkoordinaten.

Werden zwei komplexe Zahlen miteinander multipliziert, so werden die Winkel addiert und die Längen multipliziert.



$$\begin{aligned} A * B &= \big(a * cis(\alpha)\big) * \big(b * cis(\beta)\big) \\ &= (a * b) * cis(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Eine Drehung in der Gaußschen Zahlenebene lässt sich als Multiplikation mit einer Zahl $\in \mathbb{C}$ beschreiben.

Wie sieht diese Zahl aus?

- Da die Länge erhalten werden soll, muss die Zahl die Länge 1 aufweisen.
- Der Winkel φ ist frei wählbar.

In der cis-Darstellung lässt sich die gesuchte Zahl formell bestimmen:

$$z = 1 * cis(\varphi) = e^{i\varphi}$$

Für die „gedrehte" Zahl $z' = x' + iy'$ gilt:

$$\begin{aligned} z' &= e^{i\varphi} * z \\ &= cis(\varphi) * z \\ &= cis(\varphi) * (x + iy) \\ &= (\cos(\varphi) + i * \sin(\varphi)) * (x + iy) \\ &= \cos(\varphi) * x + \cos(\varphi) * iy + i * \sin(\varphi) * x + i * \sin(\varphi) * iy \\ &= \cos(\varphi) * x + i * \cos(\varphi) * y + i * \sin(\varphi) * x + i^2 * \sin(\varphi) * y \\ &= \cos(\varphi) * x + i * \cos(\varphi) * y + i * \sin(\varphi) * x - \sin(\varphi) * y \\ &= \cos(\varphi) * x - \sin(\varphi) * y + i * (\cos(\varphi) * y + \sin(\varphi) * x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x' &= Re(z') = \cos(\varphi) * x - \sin(\varphi) * y \\ y' &= Im(z') = \cos(\varphi) * y + \sin(\varphi) * x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) * x - \sin(\varphi) * y \\ \cos(\varphi) * y + \sin(\varphi) * x \end{pmatrix}$$

Da es sich um eine lineare Abbildung handelt, lässt sich diese mit einer Matrix darstellen:

$$D_\varphi * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) * x - \sin(\varphi) * y \\ \cos(\varphi) * y + \sin(\varphi) * x \end{pmatrix}$$

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

5.6 Spiegelung an einer beliebigen Ebene

Aus dem nicht mehr aktiven Link
http://users.minet.uni-jena.de/∼haroske/math_ing/math_ing-11.pdf ...

Sei $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $|\vec{u}| = 1$, die Abbildung $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beschreibe eine Spiegelung an der zu $\vec{u}$ orthogonalen Ebene $E = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \vec{u} \cdot \vec{x} = 0\right\}$,

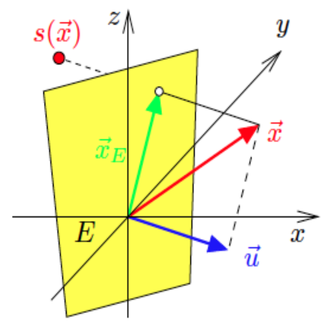
$$s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad s : \vec{x} \mapsto s(\vec{x}) = \vec{x} - 2(\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u},$$

da $\dfrac{\vec{x} + s(\vec{x})}{2} = \vec{x}_E = \vec{x} - \vec{x}_E^{\perp} = \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u}$

$$\curvearrowright \; s(\vec{e_j}) = \vec{e_j} - 2u_j\vec{u}, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\curvearrowright \; A_s = \big(s(\vec{e_1}) \quad s(\vec{e_2}) \quad s(\vec{e_3})\big)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 2u_1^2 & -2u_1u_2 & -2u_1u_3 \\ -2u_1u_2 & 1 - 2u_2^2 & -2u_2u_3 \\ -2u_1u_3 & -2u_2u_3 & 1 - 2u_3^2 \end{pmatrix}$$



$\vec{x}_E^{\perp} = \vec{x}_{\vec{u}} = (\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u}$

Man kann zeigen: $A_s^{\top} A_s = I$, $\det A_s = -1 \;\curvearrowright\; A_s$ orthogonal $\curvearrowright\; s$ orthogonal

Schwerpunkte, weiterführende Fragen, Aufgaben, ...:

- Eigenes Beispiel,
- Überprüfung der geometrischen Eigenschaften Längentreue, Winkeltreue, Flächentreue,
- Diskutiere die Situation an einer nicht durch den Ursprung gehenden Spiegelungsebene.

_AM_ Algebra-Aufgaben: *Lineare Abbildungen 3*

Aufgaben 5.1 *Recherchiere die* IWASAWA - Zerlegung

6 Geometrische Bedeutung der Determinante

Als Grundlage verwenden wir die folgenden Skripte:

Geometrische Deutung der Determinante zweiter Ordnung
Lubov Vassilevskaya
28.02.2001
http://www.math-grain.de/download/m1/matrix/determinant/geom-deutung-1.pdf

Determinanten
Johann Brandstetter
http://homepage.univie.ac.at/johann.brandstetter/ ....pdf

Geometrische Deutung linearer Abbildungen
Christian Zschallig
TU Dresden
https://tu-dresden.de/mn/math/algebra/das-institut/beschaeftigte/christian-zschalig/
ldots

(sehr ausführlich, mit Repetitionen, ...)
Determinanten
von Hans Walser
https://docplayer.org/130280457-Mathematik-2-fuer-naturwissenschaften.html

7 Äquivalenzsatz für orthogonale Matrizen

Wir verwenden dazu einem Skript der Uni-Paderborn zur
Euklidschen Geometrie :

http://www-math.uni-paderborn.de/ martine/Veranstaltungen/GeometrieSeminar0506/euklidischeEbene.doc

Minimale Vorbereitung für den Beweis des Äquivalenzsatzes

- Bedeutung einer *Äquivalenz*

- $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
  $A \cdot B \neq B \cdot A$
  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
  $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

- $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \mid \vec{x} \mid^2$
  $\mid \vec{x} + \vec{y} \mid \leq \mid \vec{x} \mid + \mid \vec{y} \mid$
  $\mid \vec{x} + \vec{y} \mid^2 = \ \ldots \ = \mid \vec{x} \mid + 2 \cdot \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \mid \vec{y} \mid$

- *Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung.*

6. Die orthogonale Gruppe

6.1. Definition:

Die Gruppe der reellen orthogonalen 2 x 2 Matrizen wird mit $O(2)$ bezeichnet, also

$$O(2) := \left\{ T \in Mat\left(2,\mathbb{R}\right) : T^t T = E_2 \right\}$$

6.2 Äquivalenzsatz für orthogonale Matrizen:

Für eine reelle 2 x 2 Matrix T sind äquivalent:

(i) T ist orthogonal
(ii) T^t ist orthogonal
(iii) T ist invertierbar und es gilt $T^{-1} = T^t$
(iv) $T = \left(a, b\right)$ mit $a, b \in E$ und $|a| = |b| = 1,\ \langle a, b\rangle = 0$
(v) $|T \cdot x| = |x|, \forall x \in E$
(vi) $\langle T \cdot x, T \cdot y\rangle = \langle x, y\rangle,\ \ \forall x, y \in E$

Insbesondere gilt $\det\left(T\right) = \pm 1$

Beweis:

aus dem Determinantenproduktsatz und der Definition der Gruppe O(2) folgt sofort:

$$1 = \det\left(T^t T\right) = \det\left(T^t\right) \cdot \det\left(T\right) = \det\left(T\right)^2$$
$$\Leftrightarrow \det\left(T\right) = \pm 1$$

Somit folgt automatisch (iii) da die Matrix nun invertierbar ist.

(i) => (ii): wissen: $E_2 = T^t T \Leftrightarrow E_2^{-1} = T^{-1} T^{t^{-1}} \Leftrightarrow T T^t = E_2$
da $\left(T^t\right)^t = T$ folgt die Behauptung

(ii) => (i) wie oben klar

(iv) $\Leftrightarrow$ (i): Es gilt $T^t T = \begin{pmatrix} a^t \\ b^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^t a & a^t b \\ b^t a & b^t b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & \langle a, b\rangle \\ \langle a, b\rangle & |b|^2 \end{pmatrix} = E_2$

Damit folgt (i) sofort aus (iv).

(i) => (v) klar, da $T^t T = E_2$ und $|x|^2 = x^t x$
Denn $|Tx|^2 = \left(Tx\right)^t Tx = x^t T^t T x = x^t x = |x|^2$

(v) => (vi)
$$\langle T\left(x+y\right), T\left(x+y\right)\rangle = |Tx|^2 + 2\langle Tx, Ty\rangle + |Ty|^2 = \left|T\left(x+y\right)\right|^2 = |x+y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2$$

(vi) => (i)
Setze die Standardeinheitsvektoren in (vi) ein.

6.3 Definition:

Für $\varphi \in \mathbb{R}$ definiert man:

$$T(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

6.4 Folgerungen:

Man weiß bekanntlich:

(i) $T \in O(2),\ \det(T) = 1 \Leftrightarrow T = T(\varphi)$ für ein $\varphi \in \mathbb{R}$
(ii) $T \in O(2),\ \det(T) = 1 \Leftrightarrow T = S(\varphi)$ für ein $\varphi \in \mathbb{R}$

(iii) Über die Additionstheoreme ergibt sich:
$T(\varphi)e(\psi) = e(\varphi + \psi)$ und $S(\varphi)e(\psi) = e(\varphi - \psi)$

Somit beschreibt die Abbildung:

(iv) $E \to E,\ x \mapsto T(\varphi)x$, eine Drehung um den Winkel φ

(v) $E \to E,\ x \mapsto S(\varphi)x$, eine Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R} \cdot e\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

(vi) Insbesondere gilt $T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J$ und $T\left(\frac{\pi}{2}\right)x = x^{\perp}$ (J siehe 2.1)

6.5 Definition:

Die Untergruppe $SO(2) := \{T \in O(2) : \det(T) = 1\}$ von O(2) heißt spezielle orthogonale Gruppe und besteht aus allen Drehungen $T(\varphi)$.

6.6 Bemerkung:

Alle Matrizen dieser Gruppe erfüllen die Identität

$$[Tx, Ty, Tz] = \det(T) \cdot [x, y, z]$$

8 Fragen zur Prüfungsvorbereitung

Die folgenden Fragen sind zur *Prüfungsvorbereitung* gedacht, in Anlehung an die behandelten Unterlagen und von euch eingebrachten Arbeiten ...

1. Definiere mit *Mathematica* drei beliebige Matrizen A, B und C, mit

   $$A \in M_4(\mathbb{R}), B \in M(3 \times 4, \mathbb{R}) \text{ und } C \in M(4 \times 3, \mathbb{R})$$

   Bestimme

   (a) $A \cdot B$, $B \cdot C$, $C \cdot A$, A^6 , $(B^t)^2$, $\det(C \cdot B)$, A^{-1} , B^{-1} , $(B \cdot C)^{-1}$

   (b) Begründe, warum die nicht-berechenbaren Ausdrücken nicht berechenbar sind.

   (c) Beweise: $A \cdot (C \cdot B) = A \cdot B \cdot C$.

2. Wir betrachten eine beliebige Streckung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit Streckungen in alle drei Basisrichtungen.

   (a) Bestimme die zugehörige Matrix.

   (b) Formuliere eine Vermutung für die Form der zugehörigen Inversen und beweise sie.

   (c) Beweise die winkeltreue.

   (d) Wir betrachten nun eine beliebige Streckung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

      i. Welche Bedingung müssen die Diagonalelemente erfüllen, damit die Streckung flächentreu bleicht.

      ii. Bestimme ein Beispiel.

      iii. Untersuche dein Beispiel auf längentreue.

      iv. Bestimme die zugehörige Inverse.

      v. Wir gehen von einem ebenen Dreieck ΔXYZ aus, mit

      $$X = (-5/2) \ , \ Y = (3/2) \text{ und } Z = (5/-4)$$

      - Berechne die Koordinaten des Bildreiecks $\Delta' X'Y'Z'$ unter deiner Abbildung.
      - Berechne die Innenwinkel, den Inhalt und den Umfang des Urbild- & Bilddreiecks.
      - Konstruiere Urbild & Bild.

3. Wir definieren den folgenden Vektor $\vec{u} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (a) Warum definiert $E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; \vec{u} \cdot \vec{x} = 0\}$ eine orthogonale Ebene an den Vector $\vec{u}$?
   (b) Ergänze die Definition für E so, dass nur die orthogonale Ebene durch den Ursprung in definiert.
   (c) Bestimme die zur Spiegelung zugehörige Abbildungsmatrix A und die dazugehörige Inverse A^{-1}.
   Verifiziere an einem Zahlenbeispiel, dass deine Inverse die Abbildung A wirklich invertiert.
   (d) Beweise, dass A winkeltreu ist. (verwende später erarbeitetes Wissen).
   (e) Formuliere eine Vermutung für die geometrische Eigenschaft, welche hinter $\det = -1$ steht.

4. Die Herleitung einer Drehmatrix um eine beliebige Achse im Raum und die Verifikation der geometrischen Eigenschaften.

5. Wir definieren die *allgemeine lineare Gruppe*:

$$Gl_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$$

   Beweise, dass $Gl_n(\mathbb{R})$ wirklich eine Gruppe ist.

6. Wir betrachten den Beweis für den

   Äquivalenzsatz für orthogonale Gruppen:

   (a) Erkläre jeden Schritt in der Beweisführung $(v) \Rightarrow (vi)$.
   (b) Führe den Beweise $(vi) \Rightarrow (i)$ aus.
   (c) Erkläre, warum mit den aufgeführten Beweise die Äquivalenz vollständig bewiesen wird.
   (d) Beweise, nur unter Verwendung der bewiesenen Implikationen & Äquivalenzen die folgenden Aussagen:

$$(iii) \Rightarrow (v) \quad \text{und} \quad (ii) \Leftrightarrow (vi)$$