***AM* Algebra-Aufgaben:** *Lineare Abbildungen 3*

zur *Spiegelung an einer beliebigen (durch den Ursprung gehenden) Ebene*

Originalquelle Theorie:

https://users.minet.uni-jena.de/~haroske/math_ing/math_ing-11.pdf

1. Konstruiere ein eigenes Beispiel und lasse es von einer Mitschülerin/ einem Mitschüler verifizieren.

2. Bestimme die Abbildungsmatrix für eine Spiegelung an der Ebene $E: x - 2y + 3z = 0$

Arbeite im Folgenden mit deinem (verifizierten) Beispiel ...

3. Wähle einen beliebigen Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$:
   (a) Bestimme $\vec{x}_{\vec{u}}$.
   (b) Bestimme $\vec{x}_E$.
   (c) Überlege dir das Resultat von $A_s \cdot \vec{x}_{\vec{u}}$ und beweise deine Vermutung.
   (d) Überlege dir das Resultat von $A_s \cdot \vec{x}_E$ und beweise deine Vermutung.

4. Beweise die folgenden Eigenschaften:
   (a) A_s ist flächenerhaltend, längen- & winkeltreu.
   (b) A_s ist invertierbar.
   (c) $A_s^{-1} = A_s^T$
   (d) $\mid A_s \cdot \vec{x} \mid = \mid \vec{x} \mid, \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$
   Zuerst an einem Zahlenbeispiel, dann in voller Allgemeinheit.
   (e) $A_s\vec{x} \cdot A_s\vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y}, \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$
   Zuerst an einem Zahlenbeispiel, dann in voller Allgemeinheit.

5. Definiere den Begriff der orthogonalen Gruppe und beweise, dass die Spiegelung an einer beliebigen (durch den Ursprung gehenden) Ebene ein Element dieser Gruppe und somit *orthogonal* ist.

6. Untersuche die Spiegelung an einer beliebigen, nicht durch den Ursprung gehenden Ebene.

Fortführung der Aufgabe 3. aus der Serie *Lineare Abbildungen 2*:

- Bestimme die Abbildungmatrix $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ für eine Spiegelung an einer beliebigen, durch den Ursprung gehenden Geraden.

- Beweise, dass sich die Verknüpfung einer Spiegelung an einer beliebigen Achse durch den Ursprung und an einer Koordinatenachse durch eine Drehung um den Ursprung ersetzen lässt.
- Formuliere eine weitere Verallgemeinerung der letzen Aufgabe.