Lineare Algebra

R. Manz

Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

School of
Engineering

Inhaltsverzeichnis

6

Spezielle lineare Abbildungen

In diesem Kapitel untersuchen wir spezielle lineare Abbildungen $f:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$. Allgemein ausgedrückt, handelt es sich um folgende lineare Abbildungen:

- Spiegelung an einer Ebene des Raumes.
- Spiegelung an einer Geraden.
- Spiegelung an einem Punkt.
- Streckung, zentrische Streckung.
- Scherung.
- Drehung in der Ebene.
- Drehung im Raum.

Wir wissen, dass jeder linearen Abbildungen f bezüglich einer gewählten Basis eine Matrix A zugeordnet werden kann. Es geht also um die Frage, wie die Matrizen dieser speziellen linearen Abbildungen aussehen.

6.1 Spiegelung

6.1.1 Spiegelung an einer Ebene im Raum

Gegeben sei eine Ebene E: $ax + by + cz = 0$ des Raumes $\mathcal{R} = \{P(x/y/z) |\ \overrightarrow{OP} \in \mathbb{R}^3\}$ **durch den Nullpunkt** und ein beliebiger Punkt $P(u/v/w)$ des Raumes $\mathcal{R}$. Wir wollen den Punkt $P'(u'/v'/w')$ berechnen, der durch Spiegelung des Punktes an $P(u/v/w)$ der Ebene E hervorgeht. Die Spiegelung geschieht im affinen Raum $\mathcal{R}$ der Punkte. Das Problem lösen wir mit Hilfe der Vektoren.

Sei $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OP} \in \mathbb{R}^3$ der Ortsvektor des Punktes $P(u/v/w)$, und sei $\boldsymbol{y} = \overrightarrow{OP'} \in \mathbb{R}^3$ der Ortsvektor des Punktes $P'(u'/v'/w')$. Die Zuordnung $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$ möchten wir als eine lineare Abbildung beschreiben:

$$s:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{y} = s(\boldsymbol{x}) = S \cdot \boldsymbol{x},$$

und die entsprechende Matrix S herleiten. Als Basis im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ wählen wir die kanonische Basis $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Der Vorteil einer Spiegelungsmatrix S ist, dass beliebige Punkte P gespiegelt werden können, indem man den Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ bildet, $\overrightarrow{OP'} = S \cdot \overrightarrow{OP}$ rechnet, und aus $\overrightarrow{OP'}$ die Koordinaten des gespiegelten Punktes P' herausliest.

Die Abbildung 6.1 zeigt die Spiegelung an der Ebene E und die Vektoren, die zur Lösung des Problems nötig sind.

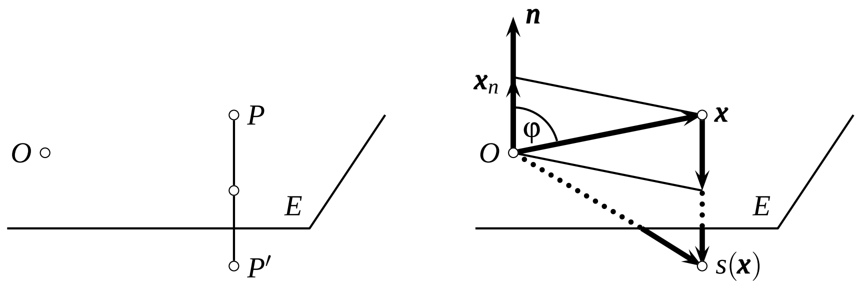


Abbildung 6.1: Spiegelung an der Ebene E

Aus der Koordinatengleichung der Ebene E leiten wir den Normalenvektor: $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ab. Mit Hilfe des Normalenvektors berechnen wir den Spiegelvektor $\boldsymbol{y} = s(\boldsymbol{x})$ des Vektors $\boldsymbol{x}$. Man bilde das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{n}$:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n} \rangle = \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{n}\| \cdot \cos(\varphi).$$

Für den Vektor $\boldsymbol{x}_n$ gilt:

$$\|\boldsymbol{x}_n\| = \|\boldsymbol{x}\| \cdot \cos(\varphi).$$

und somit

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n} \rangle = \|\boldsymbol{x}_n\| \cdot \|\boldsymbol{n}\|.$$

Daraus folgt

$$\|\boldsymbol{x}_n\| = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n} \rangle}{\|\boldsymbol{n}\|}.$$

Der Spiegelvektor $s(\boldsymbol{x})$ ergibt sich dann wie folgt:

$$s(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2\|\boldsymbol{x}_n\| \frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|} = \boldsymbol{x} - 2\frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{n} \rangle}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n}. \tag{6.1}$$

Wir müssen noch einsehen, dass die Abbildung s linear ist. Seien $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^3$, dann gilt:

$$\begin{aligned} s(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) &= \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - 2\frac{\langle \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{n} \rangle}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n} \\ &= \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 - 2\frac{\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{n} \rangle + \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{n} \rangle}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n} \\ &= \boldsymbol{x}_1 - 2\frac{\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{n} \rangle}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n} + \boldsymbol{x}_2 - 2\frac{\langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{n} \rangle}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n} \\ &= s(\boldsymbol{x}_1) + s(\boldsymbol{x}_2). \end{aligned}$$

Sei $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann schliesst man:

$$\begin{aligned} s(\lambda\boldsymbol{x}) &= \lambda\boldsymbol{x} - 2\frac{\langle\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}\rangle}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n} \\ &= \lambda\boldsymbol{x} - 2\lambda\frac{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}\rangle}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n} \\ &= \lambda\left[\boldsymbol{x} - 2\frac{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}\rangle}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n}\right] \\ &= \lambda s(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Fassen wir in einem Satz zusammen.

Satz 6.1
Sei E: $ax+by+cz=0$ eine Ebene des Raumes $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt mit dem Normalenvektor $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ zur Ebene E. Die lineare Abbildung

$$s\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{y} = s(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2\frac{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}\rangle}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n}$$

ist eine **Spiegelung** an der Ebene E.

Frage: Wie lautet die dazugehörige **Spiegelungsmatrix** S?

Antwort: Die Spaltenvektoren der Spiegelungsmatrix S sind die Bildvektoren der Basisvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, also:

$$S(s(\boldsymbol{e}_1), s(\boldsymbol{e}_2), s(\boldsymbol{e}_3)).$$

Die Bildvektoren $s(\boldsymbol{e}_k)$ berechnen sich folgendermassen:

$$\begin{aligned} s(\boldsymbol{e}_1) &= \boldsymbol{e}_1 - 2\frac{\langle\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{n}\rangle}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\frac{a}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\begin{pmatrix} \|\boldsymbol{n}\|^2 - 2a^2 \\ -2ab \\ -2ac \end{pmatrix} \\ s(\boldsymbol{e}_2) &= \boldsymbol{e}_2 - 2\frac{\langle\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{n}\rangle}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\frac{b}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\begin{pmatrix} -2ab \\ \|\boldsymbol{n}\|^2 - 2b^2 \\ -2bc \end{pmatrix} \\ s(\boldsymbol{e}_3) &= \boldsymbol{e}_3 - 2\frac{\langle\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{n}\rangle}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\frac{c}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\begin{pmatrix} -2ac \\ -2bc \\ \|\boldsymbol{n}\|^2 - 2c^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

und somit lautet die Spiegelungsmatrix:

$$\boxed{S = S(s(\boldsymbol{e}_1), s(\boldsymbol{e}_2), s(\boldsymbol{e}_3)) = \frac{1}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\begin{pmatrix} \|\boldsymbol{n}\|^2 - 2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & \|\boldsymbol{n}\|^2 - 2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & \|\boldsymbol{n}\|^2 - 2c^2 \end{pmatrix}} \tag{6.2}$$

Beispiel 6.1
Der Punkt $P(1/2/2)$ wird an der projizierenden Ebene $E\colon x-y=0$ gespiegelt. Zeichne in der Abbildung 6.2 den Spiegelpunkt $P'(x'/y'/z')$ ein.

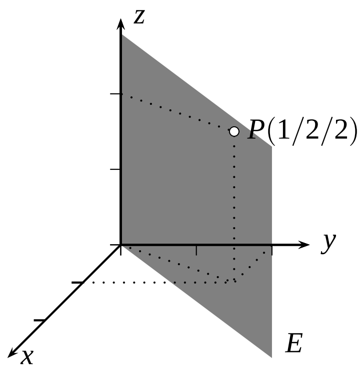


Abbildung 6.2: Spiegelung an der Ebene E

Der Normalenvektor zur Ebene E ist $\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ und $\|\boldsymbol{n}\|^2=2$. Die Spiegelungsmatrix lautet somit

$$S=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Für die Punkte P und P' gilt:

$$\overrightarrow{OP'}=S\cdot\overrightarrow{OP}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad P'(2/1/2).$$

Beispiel 6.2
Wir berechnen die Spiegelungsmatrix S der Spiegelung an der x-y-Ebene?

Ein Normalenvektor zu dieser Ebene ist der Vektor $\boldsymbol{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ und die zugehörige Spiegelungsmatrix S lautet dann:

$$S=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

6.1.2 Spiegelung an einer Geraden in der Ebene durch 0-Punkt

Ein Punkt $P(u/v)$ wird an der Geraden g durch den 0-Punkt gespiegelt. Der Winkel zwischen der x-Achse und g sei φ. Siehe Abbildung 6.3.

Die Koordinatengleichung der Gerade g sei $ax+by=0$. Die Spiegelung eines Punktes $P(u/v)$ an der Geraden kann als lineare Abbildung beschrieben werden, analog zur Spiegelung eines Punktes an einer Ebene im Raum. Somit kann man die Gleichung (6.1) in Analogie übernehmen:

$$s\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\quad \boldsymbol{y}=s(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-2\frac{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}\rangle}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n}.$$

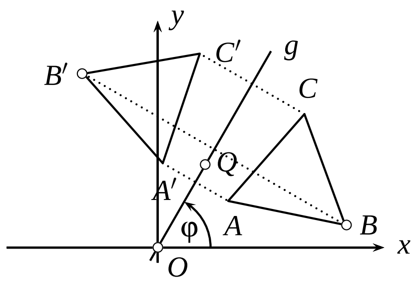


Abbildung 6.3: Spiegelung an der Geraden g

Sei Q ein Punkt auf der Geraden g, so dass $\|\overrightarrow{OQ}\| = 1$ ist (siehe Abbildung 6.3). Dann hat Q die Koordinaten $Q(\cos(\varphi)/\sin(\varphi))$. Der Vektor

$$\boldsymbol{n} = \overrightarrow{OQ}^{\perp} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}^{\perp} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

ist ein Normalenvektor zu g. Die Spaltenvektoren der Spiegelungsmatrix S sind die Bildvektoren der Basisvektoren $\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_2$, also:

$$S(s(\boldsymbol{e}_1), s(\boldsymbol{e}_2)).$$

Die Bildvektoren $s(\boldsymbol{e}_k)$ berechnen sich folgendermassen:

$$s(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 - 2\frac{\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{n} \rangle}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\sin(\varphi)\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\sin^2(\varphi) \\ 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) \end{pmatrix}$$
$$s(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2 - 2\frac{\langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{n} \rangle}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\cos(\varphi)\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ 1 - 2\cos^2(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2\varphi) \\ -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}.$$

und somit lautet die Spiegelungsmatrix:

$$\boxed{S = S(s(\boldsymbol{e}_1), s(\boldsymbol{e}_2)) = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}.} \tag{6.3}$$

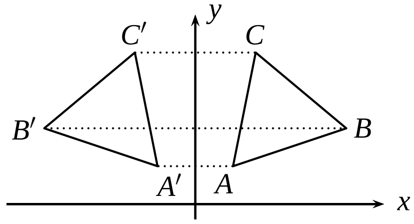
Die Spiegelung an der Geraden g durch den 0-Punkt mit Winkel φ zwischen x-Achse und g, wird durch folgende lineare Abbildungen beschrieben:

$$s: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{y} = s(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$$

6.1.3 Spiegelung an der y-Achse

Die Spiegelung von Punkten an der y-Achse kann als Spezialfall der Gleichung (6.3) mit $\varphi = 90°$ betrachtet werden und wird durch folgende lineare Abbildungen beschrieben:

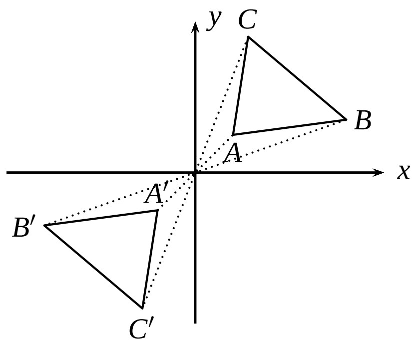
$$s: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{y} = s(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$$



6.1.4 Spiegelung am Nullpunkt in der Ebene

Die Spiegelung von Punkten am 0-Punkt in der Ebene wird durch folgende lineare Abbildungen beschrieben:

$$s: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{y} = s(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}.$$

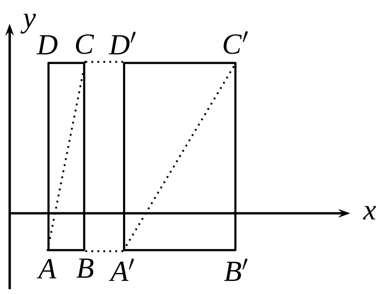


6.2 Streckungen

6.2.1 Streckung längs der x-Achse

Die Streckung längs der x-Achse wird durch folgende lineare Abbildungen beschrieben:

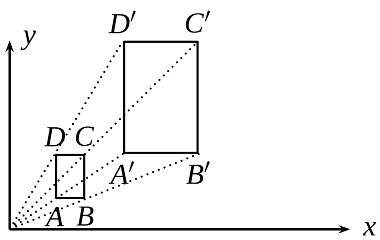
$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x},\ a_{11} > 0.$$



6.2.2 Zentrische Streckung vom 0-Punkt aus

Die zentrische Streckung vom 0-Punkt aus wird durch folgende lineare Abbildungen beschrieben:

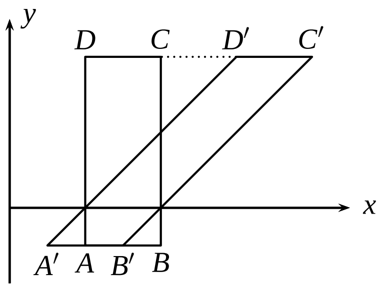
$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \boldsymbol{x},\ a > 0.$$



6.3 Scherung längs der x-Achse

Die Scherung längs der x-Achse wird durch folgende lineare Abbildungen beschrieben:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}.$$



6.4 Drehungen

Wir unterscheiden Drehungen in der Ebene und Drehungen im Raum. Bei einer Drehung in der Ebene wird ein Punkt P der Ebene, repräsentativ für alle Punkte der Ebene, in den Punkt P' der

Ebene übergeführt. Bei den Drehungen im Raum wird ein Punkt P um eine räumliche Drehachse in den Punkt P' gedreht. Die planaren, wie die räumlichen Drehungen werden als lineare Abbildungen behandelt. Dabei sind wir wieder an den entsprechenden Drehmatrizen interessiert.

6.4.1 Drehung in der Ebene

Bei einer ebenen Drehung gehe ein Punkt $P(x/y)$ einer Ebene $\mathcal{E}$ in den Punkt $P'(x'/y')$ der gleichen Ebene über. Seien $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OP}$ und $\boldsymbol{y} = \overrightarrow{OP'}$ die Ortsvektoren dieser Punkte. Wir suchen eine lineare Abbildung

$$d:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{y} = d(\boldsymbol{x}) = D \cdot \boldsymbol{x},$$

welche einen Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ um den Winkel φ in den Vektor $\boldsymbol{y} = d(\boldsymbol{x})$ dreht. Wir berechnen die passende Drehmartix D. Die Abbildung 6.4 skizziert diesen Sachverhalt.

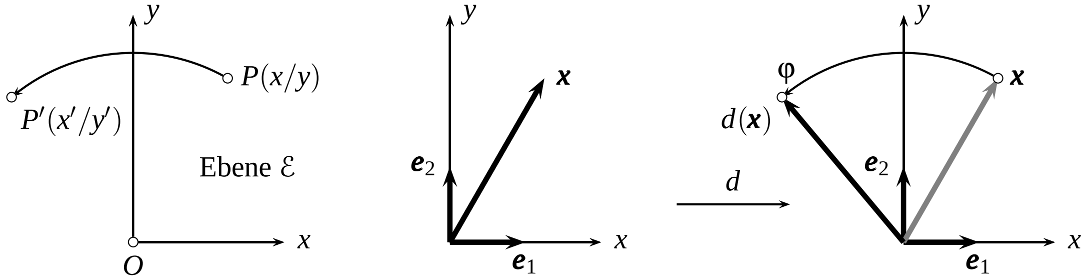


Abbildung 6.4: Drehung in der Ebene

Die Matrix D besteht aus den Bildvektoren:

$$D = (d(\boldsymbol{e}_1), d(\boldsymbol{e}_2)).$$

Wir berechnen nun die Vektoren $d(\boldsymbol{e}_1)$, $d(\boldsymbol{e}_2)$ mit Hilfe der Abbildung 6.5.

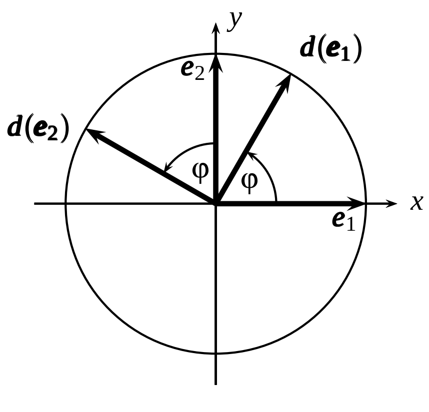


Abbildung 6.5: Berechnung der Vektoren $d(\boldsymbol{e}_1)$, $d(\boldsymbol{e}_2)$

Es gilt $\quad \|d(\boldsymbol{e}_1)\| = \|\boldsymbol{e}_1\| = 1 \quad$ und

$$d(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad d(\boldsymbol{e}_2) = d(\boldsymbol{e}_1)^{\perp} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$D = (d(\boldsymbol{e}_1), d(\boldsymbol{e}_2)) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

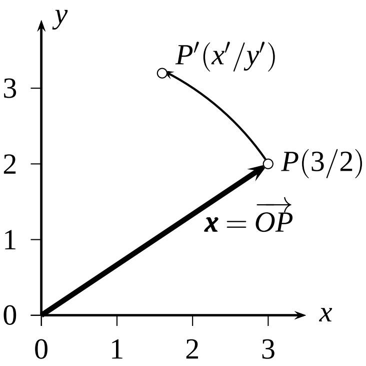
Satz 6.2
Eine Drehung in der Ebene ist eine lineare Abbildung

$$d\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{y} = d(\boldsymbol{x}) = D \cdot \boldsymbol{x}$$

mit der Matrix

$$D = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Beispiel 6.3



Drehe den Punkt $P(3/2)$ um den Winkel $\varphi = 30°$. Zeichne den gedrehten Punkt $P'(x'/y')$ in der nebenstehenden Zeichnung ein, und lies die Koordinaten von $P'(x'/y')$ aus der Zeichnung heraus.

$P'(x'/y') = \ldots$

Wir bilden $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad d(\boldsymbol{x}) = \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$

Die Drehmatrix lautet

$$D = \begin{pmatrix} \cos(30°) & -\sin(30°) \\ \sin(30°) & \cos(30°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Der gedrehte Vektor $d(\boldsymbol{x})$ erhält man wie folgt:

$$d(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = D\boldsymbol{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3\sqrt{3}-2 \\ 3+2\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 3.2 \end{pmatrix}.$$

Somit $P'(1.6/3.2)$.

Bemerkung

- Die Determinante einer Drehmatrix ist immer gleich 1:

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det(D) = 1.} \tag{6.5}$$

- Die Drehmatrix für den Winkel $\varphi = 0°$ ist die Einheitsmatrix $D_{0°} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Denn

$$D_{0°} = \begin{pmatrix} \cos(0°) & -\sin(0°) \\ \sin(0°) & \cos(0°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Die Drehmatrix für den Winkel $-\varphi$ ist die Matrix

$$D_{-\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

- Das Hintereinanderschalten der Drehungen um die Winkel φ und um $-\varphi$ ergibt die Einheitsmatrix:

$$\begin{aligned} D_\varphi \cdot D_{-\varphi} &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) & \cos(\varphi)\sin(\varphi) - \sin(\varphi)\cos(\varphi) \\ \sin(\varphi)\cos(\varphi) - \cos(\varphi)\sin(\varphi) & \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D_{0°}. \end{aligned}$$

Satz 6.3
Gegeben seien zwei Drehmatrizen D_α und D_β, dann gilt

$$D_\alpha \cdot D_\beta = D_{\alpha+\beta}.$$

Beweis
Es gilt

$$\begin{aligned} D_\alpha \cdot D_\beta &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit $D_\alpha \cdot D_\beta = D_{\alpha+\beta}$. □

Aufgabe 3
Der Punkt $P(-1/3)$ wird in den Punkt $P'(1/3)$ gedreht. Wie gross ist der Drehwinkel?

Lösung: $d(\boldsymbol{x}) = D \cdot \boldsymbol{x}$, mit $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $d(\boldsymbol{x}) = \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Also

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 1 &= -\cos(\varphi) - 3\sin(\varphi) \quad (I) \\ 3 &= -\sin(\varphi) + 3\cos(\varphi) \quad (II) \end{aligned}$$

Aus $3 \cdot (I) + (II)$ ergibt sich

$$6 = -10\sin(\varphi) \text{ oder } -\frac{6}{10} = \sin(\varphi).$$

Daraus folgt für den Winkel

$$\varphi = \begin{cases} 216.9^\circ & \text{keine Lösung, weil Gleichung nicht erfüllt ist} \\ 323.1^\circ & \text{dies ist die Lösung.} \end{cases}$$

Beispiel 6.4
Drehe das Quadrat $A(0/0), B(1/0), C(1/1), D(0/1)$ mit dem Winkel $\varphi = -60^\circ$ um den Punkt $P(2/1)$. Berechne die Koordinaten der Ecken A', B', C', D' des gedrehte Quadrat, siehe Abbildung 6.6.

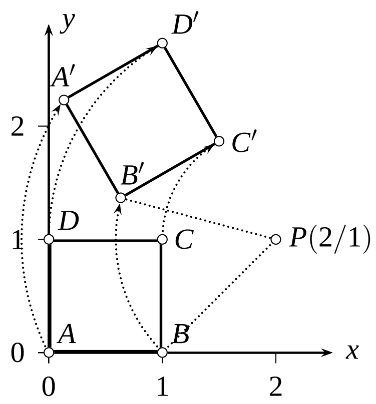


Abbildung 6.6: gedrehtes Quadrat

Vervollständige die Liste der Vektoren vom Punkt P zu den Eckpunkten des Quadrates:

$$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PC} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PD} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}.$$

Wir fassen diese Vektoren in die Matrix *Vektoren* zusammen

$$Vektoren = (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PD}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Drehmatrix lautet:

$$D_{-60^\circ} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Die gedrehten Vektoren $\overrightarrow{PA'}, \overrightarrow{PB'}, \overrightarrow{PC'}, \overrightarrow{PD'}$ lassen sich wie folgt berechnen

$$\begin{aligned} GedrehteVektoren = (\overrightarrow{PA'}, \overrightarrow{PB'}, \overrightarrow{PC'}, \overrightarrow{PD'}) &= D_{-60^\circ} \cdot Vektoren \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -(2+\sqrt{3}) & -(1+\sqrt{3}) & -1 & -2 \\ 2\sqrt{3}-1 & \sqrt{3}-1 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um die Ortsvektoren $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$, $\overrightarrow{OD'}$ der gedrehten Ecken A', B', C', D' zu erhalten, muss der Vektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu jedem der Vektoren $\overrightarrow{PA'}$, $\overrightarrow{PB'}$, $\overrightarrow{PC'}$, $\overrightarrow{PD'}$ addiert werden:

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA'}, \quad \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB'}, \quad \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC'}, \quad \overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PD'}.$$

Also wird der Vektor $\overrightarrow{OP}$ zu jedem Spaltenvektor der Matrix *GedrehteVektoren* addiert:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OD'}) &= \begin{pmatrix} \frac{-(2+\sqrt{3})}{2} + 2 & \frac{-(1+\sqrt{3})}{2} + 2 & -\frac{1}{2} + 2 & -1 + 2 \\ \frac{2\sqrt{3}-1}{2} + 1 & \frac{\sqrt{3}-1}{2} + 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 & \sqrt{3} + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3-\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 & \sqrt{3} + 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+2}{2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{OD'} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} + 1 \end{pmatrix}.$$

Somit schliesst man für die gedrehten Punkte:

$$A'(\tfrac{2-\sqrt{3}}{2} / \tfrac{\sqrt{3}+1}{2}), \quad B'(\tfrac{3-\sqrt{3}}{2} / \tfrac{1+\sqrt{3}}{2}), \quad C'(\tfrac{3}{2} / \tfrac{\sqrt{3}+2}{2}), \quad D'(1/\sqrt{3}+1).$$

Beispiel 6.5

Eine Parabel $y = x^2$ wird um 45° gedreht. Wie lautet die Gleichung dieser gedrehten Parabel?

Lösung: Sei $P(x/y)$ ein Punkt auf der Parabel und sei $P'(u/v)$ ein Punkt auf der gedrehten Parabel. Für die Ortsvektoren zu diesen Punkten gilt:

$$\overrightarrow{OP'} = D_{45^\circ} \overrightarrow{OP} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei $y = x^2$ ist. Die Drehmatrix D_{45° lautet mit den exakten Werten

$$D_{45^\circ} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} u &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} x - \tfrac{\sqrt{2}}{2} y \\ v &= \tfrac{\sqrt{2}}{2} x + \tfrac{\sqrt{2}}{2} y \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem wird nach x und y aufgelöst:

$$x = \frac{u+v}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad y = -\frac{u-v}{\sqrt{2}}.$$

x und y in der Parabelgleichung $y = x^2$ einsetzen:

$$\begin{aligned} -\frac{u-v}{\sqrt{2}} = \left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}(u^2 + 2uv + v^2) &\Leftrightarrow \frac{-2u+2v}{\sqrt{2}} = u^2 + 2uv + v^2 \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{2}u + \sqrt{2}v = u^2 + 2uv + v^2 \\ &\Leftrightarrow u^2 + v^2 + 2uv + \sqrt{2}u - \sqrt{2}v = 0. \end{aligned}$$

Die Variablen u und v dürfen wieder x und y heissen. Somit lautet die Gleichung der gedrehten Parabel:

$$x^2 + y^2 + 2xy + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0.$$

Dies ist eine implizite Beschreibung einer Kurve. Um die gedrehte Parabel skizzieren zu können, fassen wir die Gleichung als eine quadratische Gleichung

$$y^2 + (2x - \sqrt{2})y + \sqrt{2}x + x^2 = 0$$

für die Variable y auf und verwenden die Lösungsformel der quadratische Gleichung. Dabei sind die Lösungen $y_{1,2}$ mit x parametrisiert.

$$y_{1,2} = \frac{-(2x-\sqrt{2}) \pm \sqrt{(2x-\sqrt{2})^2 - 4(\sqrt{2}x + x^2)}}{2} = \frac{-(2x-\sqrt{2}) \pm \sqrt{2 - 8\sqrt{2}x}}{2}.$$

Die gedrehte Parabel ist für folgende x definiert:

$$2 - 8\sqrt{2}x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \geq 8\sqrt{2}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{8} \geq x \quad \Leftrightarrow \quad 0.177 \geq x.$$

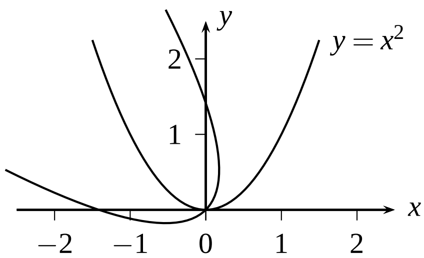
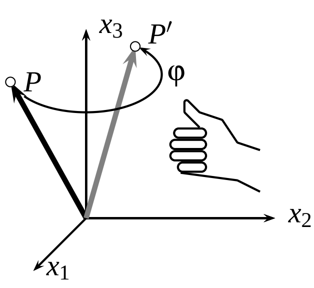


Abbildung 6.7: gedrehte Parabel

6.4.2 Drehung im Raum

Wir betrachten nun räumliche Drehungen. Dabei wird ein Punkt P des Raumes, repräsentativ für alle Punkte des Raumes, um eine Achse a in den Punkt P' gedreht. Wir betrachten zuerst die räumlichen Drehungen um die einzelnen Koordinatenachsen. Für diese räumlichen Drehungen treffen wir folgende **Abmachung**.

> Wird ein Punkt P oder sein Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ um eine Achse des Koordinatensystems gedreht, so wird die positive Drehrichtung mit der **Rechtsregel** definiert: Die Finger umfassen die Achse mit dem Daumen in der Richtung der Achse. Die Finger zeigen in die positive Drehrichtung.



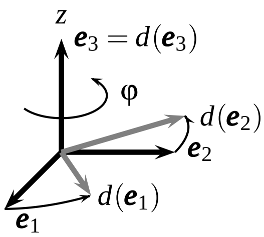
Drehungen im Raum werden als lineare Abbildungen

$$d\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{y} = d(\boldsymbol{x}) = D\cdot \boldsymbol{x}$$

beschrieben. Wir bestimmen wieder die entsprechende Drehmatrix D. Zur Berechnungen der Drehmatrix D wird wieder die Tatsache benutzt, dass die Spaltenvektoren der Drehmatrix die Bildvektoren der Basisvektoren sind, also

$$D = (d(\boldsymbol{e}_1), d(\boldsymbol{e}_2), d(\boldsymbol{e}_3)).$$

Drehung $D_{z,\varphi}$ mit Winkel φ um z-Achse



Sei $d(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\cos(\varphi) = \langle d(\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{e}_1\rangle = x \quad \text{und} \quad \cos(\tfrac{\pi}{2} - \varphi) = \sin(\varphi) = \langle d(\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{e}_2\rangle = y.$$

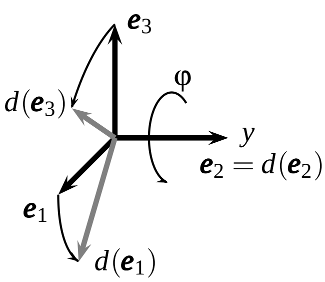
Also ist $d(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$. Sei $d(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\cos(\varphi) = \langle d(\boldsymbol{e}_2), \boldsymbol{e}_2\rangle = y \quad \text{und} \quad \cos(\tfrac{\pi}{2} + \varphi) = -\sin(\varphi) = \langle d(\boldsymbol{e}_2), \boldsymbol{e}_1\rangle = x.$$

Also ist $d(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$. Ferner ist $d(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Drehmatrix um die z-Achse lautet somit:

$$\boxed{D_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.} \tag{6.6}$$

Drehung $D_{y,\varphi}$ mit Winkel φ um y-Achse



Sei $d(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\cos(\varphi) = \langle d(\boldsymbol{e}_3), \boldsymbol{e}_3\rangle = z \quad \text{und} \quad \cos(\tfrac{\pi}{2} - \varphi) = \sin(\varphi) = \langle d(\boldsymbol{e}_3), \boldsymbol{e}_1\rangle = x.$$

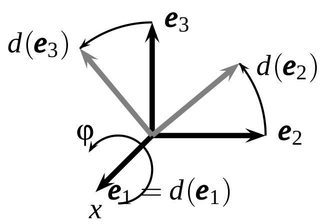
Also ist $d(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) \\ 0 \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$. Sei $d(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\cos(\varphi) = \langle d(\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{e}_1\rangle = x \quad \text{und} \quad \cos(\tfrac{\pi}{2} + \varphi) = -\sin(\varphi) = \langle d(\boldsymbol{e}_1), \boldsymbol{e}_3\rangle = z.$$

Also ist $d(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ 0 \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix}$. Ferner ist $d(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Drehmatrix um die y-Achse lautet somit:

$$\boxed{D_{y,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.} \tag{6.7}$$

Drehung $D_{x,\varphi}$ mit Winkel φ um x-Achse



Sei $d(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\cos(\varphi) = \langle d(\boldsymbol{e}_2), \boldsymbol{e}_2 \rangle = y \quad \text{und} \quad \cos(\tfrac{\pi}{2} - \varphi) = \sin(\varphi) = \langle d(\boldsymbol{e}_2), \boldsymbol{e}_3 \rangle = z.$$

Also ist $d(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$. Sei $d(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\cos(\varphi) = \langle d(\boldsymbol{e}_3), \boldsymbol{e}_3 \rangle = z \quad \text{und} \quad \cos(\tfrac{\pi}{2} + \varphi) = -\sin(\varphi) = \langle d(\boldsymbol{e}_3), \boldsymbol{e}_2 \rangle = y.$$

Also ist $d(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$. Ferner ist $d(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Drehmatrix um die x-Achse lautet somit:

$$\boxed{D_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.} \tag{6.8}$$

Beispiel 6.6
Die Gerade g mit der Parametergleichung

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

soll um eine Achse im Raum, welche durch den Nullpunkt geht, so gedreht werden, dass die gedrehte Gerade g' parallel zur x-Achse verläuft, d.h. der Richtungsvektor der Geraden g' soll kollinear zu $\boldsymbol{e}_1$ sein. Gesucht ist die Drehmatrix und die Drehachse.

Wir bestimmen zuerst die lineare Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = D \cdot \boldsymbol{x},$$

resp. die 3×3 Matrix D, welche g in g' überführt. Um die lineare Abbildung f zu finden, betrachten wir den Richtungsvektor $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ der Geraden g. Dieser Vektor $\boldsymbol{u}$ wird zuerst um die z-Achse mit der Drehmatrix $D_{z,\alpha}$ um den Winkel α in den Vektor $\boldsymbol{v}$ gedreht, so dass $\boldsymbol{v}$ in der x-z-Ebene liegt, d.h. die y-Komponente dieses Vektors ist 0. Siehe Abbildung 6.8.

$$\boldsymbol{v} = D_{z,\alpha}\cdot\boldsymbol{u} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

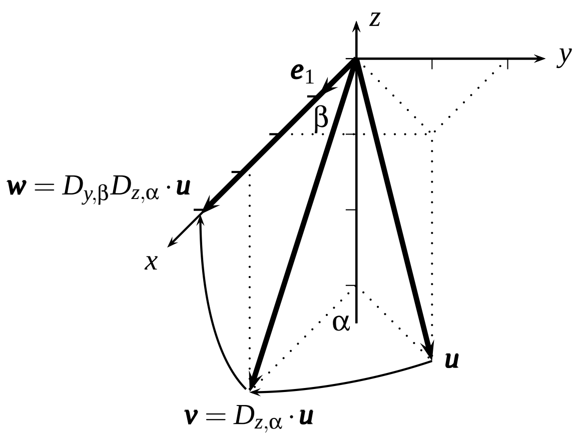


Abbildung 6.8: gedrehte Vektoren

Betrachtet man die zweite Komponente, dann folgt für den Winkel α:

$$0 = 2\sin(\alpha)+2\cos(\alpha) \quad\Leftrightarrow\quad \alpha = \arctan(-1) = \begin{cases} -45^\circ \\ 135^\circ. \end{cases}$$

Wir wählen $\alpha = -45^\circ$. Die lineare Abbildung ist

$$f_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{v} = f_1(\boldsymbol{u}) = D_{z,-45^\circ}\cdot\boldsymbol{u}.$$

Mit

$$D_{z,-45^\circ} = \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) & 0 \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\boldsymbol{v} = D_{z,\alpha}\cdot\boldsymbol{u} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Der gedrehte Vektor $\boldsymbol{v} = D_{z,\alpha}\boldsymbol{u}$ wird in einem weiteren Schritt mit Hilfe der Drehmatrix $D_{y,\beta}$ um die y-Achse in den Vektor $\boldsymbol{w}$ gedreht, sodass $\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{e}_1$ kollinear sind, d.h. $\boldsymbol{w}$ hat eine y- und z-Komponente gleich Null:

$$\boldsymbol{w} = D_{y,\beta}\cdot\boldsymbol{v} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt für den Winkel β

$$0=-2\sqrt{2}\sin(\beta)-3\cos(\beta) \quad\Leftrightarrow\quad \beta=\arctan\left(-\tfrac{3}{2\sqrt{2}}\right)=\begin{cases}-46.7^\circ\\ 133.3^\circ.\end{cases}$$

Wir wählen $\beta=-46.7^\circ$. Die lineare Abbildung ist

$$f_2:\ \mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3,\quad \boldsymbol{w}=f_2(\boldsymbol{v})=D_{y,-46.7^\circ}\cdot\boldsymbol{v}.$$

Mit

$$D_{y,-46.7^\circ}=\begin{pmatrix}\cos(-46.7) & 0 & \sin(-46.7)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(-46.7) & 0 & \cos(-46.7)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.6860 & 0 & -0.7276\\ 0 & 1 & 0\\ 0.7276 & 0 & 0.6860\end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$\boldsymbol{w}=D_{y,\beta}\cdot\boldsymbol{v} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}0.6860 & 0 & -0.7276\\ 0 & 1 & 0\\ 0.7276 & 0 & 0.6860\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}\\ 0\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{17}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\boldsymbol{w}=D_{y,\beta}\cdot\boldsymbol{v}$ ist somit kollinear zu $\boldsymbol{e}_1$. Die gesuchte lineare Abbildung f ist eine Zusammensetzung der linearen Abbildungen f_1 und f_2:

$$f:\ \mathbb{R}^3\xrightarrow{f_1}\mathbb{R}^3\xrightarrow{f_2}\mathbb{R}^3,\quad \boldsymbol{w}=f_2\circ f_1(\boldsymbol{u})=f_2(f_1(\boldsymbol{u}))=D_{y,\beta}\cdot D_{z,\alpha}\cdot\boldsymbol{u}.$$

Die Matrix der zusammengesetzten linearen Abbildungen $f_2\circ f_1$ ist

$$D=D_{y,\beta}\cdot D_{z,\alpha}=\begin{pmatrix}0.6860 & 0 & -0.7276\\ 0 & 1 & 0\\ 0.7276 & 0 & 0.6860\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.4851 & 0.4851 & -0.7276\\ -0.7071 & 0.7071 & 0\\ 0.5145 & 0.5145 & 0.6860\end{pmatrix}.$$

Die Parametergleichung der gedrehten Geraden g' finden wir, indem wir den Anfangsvektor $\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ der Geraden g mit der Matrix $D=D_{y,\beta}\cdot D_{z,\alpha}$ drehen. Also

$$D_{y,\beta}\cdot D_{z,\alpha}\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.21\\ 1.41\\ 3.09\end{pmatrix}.$$

Die gedrehte Gerade hat somit die Parametergleichung

$$g':\ \boldsymbol{r}=\begin{pmatrix}-1.21\\ 1.41\\ 3.09\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}\sqrt{17}\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

und ist parallel zur x-Achse. Wir berechnen noch die Drehachse der Drehung $D=D_{y,\beta}\cdot D_{z,\alpha}$. Alle Vektoren $\boldsymbol{x}$ auf der Drehachse bleiben unter der Drehung D fix, d.h.

$$D\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x},\quad \text{für alle } \boldsymbol{x} \text{ auf der Drehachse}.$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$D \cdot \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad D \cdot \boldsymbol{x} - I \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad (D - I) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

Dies ist ein lineares homogenes Gleichungssystem mit der Matrix

$$D - I = \begin{pmatrix} -0.5149 & 0.4851 & -0.7276 \\ -0.7071 & -0.2929 & 0 \\ 0.5145 & 0.5145 & -0.3140 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen mit der Gauss-Elimination:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline -0.5149 & 0.4851 & -0.7276 & 0 \\ -0.7071 & -0.2929 & 0.0000 & 0 \\ 0.5145 & 0.5145 & -0.3140 & 0 \end{array} \quad \xrightarrow{\texttt{rref}} \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 0 & 0.4316 & 0 \\ 0 & 1 & -1.0419 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000 & 0 \end{array}$$

Daraus folgt

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4316x_3 \\ 1.0419x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -0.4316 \\ 1.0419 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

6.4.3 Drehung um eine beliebige Raumachse

Gegeben sei eine beliebige Achse des Raumes, welche mit dem Vektor $\boldsymbol{a}$ repräsentiert wird. Ein stellvertretender Punkt P des Raumes wird mit dem Winkel φ um diese Raumachse $\boldsymbol{a}$ in den Punkt P' gedreht. Dabei sind $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OP}$ und $\boldsymbol{y} = D_{\boldsymbol{a},\varphi} \cdot \boldsymbol{x} = \overrightarrow{OP'}$ die Ortsvektoren dieser Punkte. Siehe Abbildung 6.9.

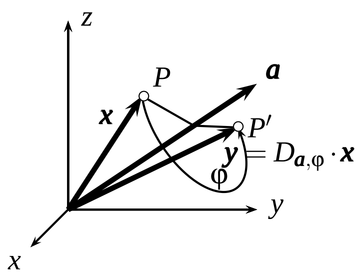


Abbildung 6.9: Drehung um eine Raumachse $\boldsymbol{a}$

Wir suchen eine lineare Abbildung, resp. die entsprechende Drehmatrix $D_{\boldsymbol{a},\varphi}$

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = D_{\boldsymbol{a},\varphi} \cdot \boldsymbol{x},$$

welche diese Drehung bewerkstelligt. Diese lineare Abbildung erhalten wir folgendermassen. Das Bild $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = D_{\boldsymbol{a},\varphi} \cdot \boldsymbol{x}$ des Vektors $\boldsymbol{x}$ erhalten wir durch Verkettung verschiedener Drehungen.

- Der Achsenvektor $\boldsymbol{a}$ wird z.B. um die z-Achse mit dem Winkel α in die x-z-Ebene in den Vektor $\boldsymbol{u}$ gedreht:

  $$\boldsymbol{u} = D_{z,\alpha} \cdot \boldsymbol{a}.$$

  Der Bildvektor $\boldsymbol{u}$ hat eine y-Komponente gleich Null. Die lineare Abbildung ist dann

  $$f_1: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{y} = D_{z,\alpha} \cdot \boldsymbol{x}.$$

- Der Vektor $\boldsymbol{u}$ der x-z-Ebene wird um die y-Achse mit dem Winkel β auf die z-Achse in den Vektor $\boldsymbol{v}$ gedreht:
$$\boldsymbol{v} = D_{y,\beta} \cdot \boldsymbol{a}.$$
Der Bildvektor $\boldsymbol{v}$ hat eine x- und y-Komponente gleich Null. Die lineare Abbildung ist dann
$$f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{y} = D_{y,\beta} \cdot \boldsymbol{x}.$$

- Die Raumachse $\boldsymbol{a}$ hat nun eine spezielle Lage, sie liegt auf der z-Achse. Die eigentliche Drehung um die Raumachse mit dem Winkel φ wird nun um die z-Achse ausgeführt:
$$f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{y} = f_3(\boldsymbol{x}) = D_{z,\varphi} \cdot \boldsymbol{x}. \tag{6.9}$$

- Nun wird um die y-Achse mit dem Winkel $-\beta$ zurückgedreht, dabei ist $D_{y,-\beta} = D_{y,\beta}^{-1}$.
$$f_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{y} = f_4(\boldsymbol{x}) = D_{y,\beta}^{-1} \cdot \boldsymbol{x}.$$
Dann wird um die z-Achse mit dem Winkel $-\alpha$ zurückgedreht, dabei ist $D_{z,-\alpha} = D_{z,\alpha}^{-1}$.
$$f_5 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{y} = f_5(\boldsymbol{x}) = D_{z,\alpha}^{-1} \cdot \boldsymbol{x}.$$
Die lineare Abbildung f ist die folgende Zusammensetzung:
$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{y} = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(\boldsymbol{x}) = D_{\boldsymbol{a},\varphi} \cdot \boldsymbol{x} = D_{z,\alpha}^{-1} D_{y,\beta}^{-1} D_{z,\varphi} D_{y,\beta} D_{z,\alpha} \cdot \boldsymbol{x}. \tag{6.10}$$
Das Produkt der Matrizen in Formel (6.10) kann auch folgendermassen geschrieben werden:
$$\boxed{D_{\boldsymbol{a},\varphi} \cdot \boldsymbol{x} = D_{z,\alpha}^{-1} D_{y,\beta}^{-1} D_{z,\varphi} D_{y,\beta} D_{z,\alpha} = (D_{y,\beta} D_{z,\alpha})^{-1} D_{z,\varphi} D_{y,\beta} D_{z,\alpha}.} \tag{6.11}$$

Wir berechnen nun die einzelnen Matrizen. Sei $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0}$. Der Vektor $\boldsymbol{a}$ wird um die z-Achse mit dem Winkel α in die x-z-Ebene in den Vektor $\boldsymbol{u}$ gedreht:
$$\boldsymbol{u} = D_{z,\alpha} \boldsymbol{a} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$
Daraus folgt für den Winkel α
$$0 = a_1 \sin(\alpha) + a_2 \cos(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\alpha = \arctan(-\tfrac{a_2}{a_1})}. \tag{6.13}$$
Für die Komponenten von $\boldsymbol{u}$ folgt
$$\boxed{u_1 = \cos(\alpha) a_1 - \sin(\alpha) a_2, \quad u_3 = a_3.} \tag{6.14}$$

Der Vektor $\boldsymbol{u}$ der x-z-Ebene wird um die y-Achse mit dem Winkel β auf die z-Achse in den Vektor $\boldsymbol{v}$ gedreht. Der Bildvektor $\boldsymbol{v}$ hat eine x- und y-Komponente gleich Null, also:

$$\boldsymbol{v} = D_{y,\beta}\boldsymbol{u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_3 \end{pmatrix}. \tag{6.15}$$

Daraus folgt für den Winkel β

$$0 = u_1\cos(\beta) + u_3\sin(\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\beta = \arctan(-\tfrac{u_1}{u_3})}. \tag{6.16}$$

Die eigentliche Drehung um den Winkel φ wird um die z-Achse ausgeführt:

$$D_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

Beispiel 6.7

Der Einheitswürfel soll um die Raumdiagonale $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ um den Winkel $\varphi = 30^\circ$ gedreht werden.

Aus der Formel (6.13) ergibt sich

$$\alpha = \arctan(-\tfrac{a_2}{a_1}) = \arctan(-1) = -45^\circ.$$

Somit ist

$$D_{z,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Formel (6.16) folgt

$$\beta = \arctan(-\tfrac{u_1}{u_3}) = \arctan(-\sqrt{2}) = -54.74^\circ.$$

Die Matrix $D_{y,\beta}$ ist

$$D_{y,\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $D_{z,\varphi}$ lautet:

$$D_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) & -\sin(30^\circ) & 0 \\ \sin(30^\circ) & \cos(30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $D_{\boldsymbol{a},\varphi}$, welche die Drehung um die Raumdiagonale $\boldsymbol{a}$ mit $\varphi = 30^\circ$ realisiert, lautet

$$D_{\boldsymbol{a},\varphi} = (D_{y,\beta}D_{z,\alpha})^{-1}D_{z,\varphi}D_{y,\beta}D_{z,\alpha} = \begin{pmatrix} 0.9107 & -0.2440 & 0.3333 \\ 0.3333 & 0.9107 & -0.2440 \\ -0.2440 & 0.3333 & 0.9107 \end{pmatrix}.$$

Die Ortsvektoren zu den Ecken des Einheitswürfels sind:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$
$$\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Um die Koordinaten der Ecken des gedrehten Würfels effizient berechnen zu können, fassen wir diese Vektoren zu einer Matrix zusammen:

$$Ecken = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}, \overrightarrow{OH}) = \begin{pmatrix}0&1&1&0&0&1&1&0\\0&0&1&1&0&0&1&1\\0&0&0&0&1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Die Spaltenvektoren der Matrix $D_{\boldsymbol{a},\varphi} \cdot Ecken$ sind dann die Ortsvektoren zu den gedrehten Würfelecken:

$$D_{\boldsymbol{a},\varphi} \cdot Ecken = \begin{pmatrix}0&0.9&0.7&-0.2&0.3&1.2&1.0&0.1\\0&0.3&1.2&0.9&-0.2&0.1&1.0&0.7\\0&-0.2&0.1&0.3&0.9&0.7&1.0&1.2\end{pmatrix}.$$

Um eine Projektion des Würfels auf die x-y-Ebene zu haben, nimmt man die ersten beiden Zeilen aus dieser Matrix. Die Zahlen in der ersten Zeile sind die x-Koordinaten der Punkte, die Werte in der zweiten Zeile die y-Koordinaten.

Aufgabe 4
Zeichne den gedrehten Würfel im Schrägbild, sowie die Projektion des gedrehten Würfels auf die x-y-Ebene in der Abbildung 6.10.

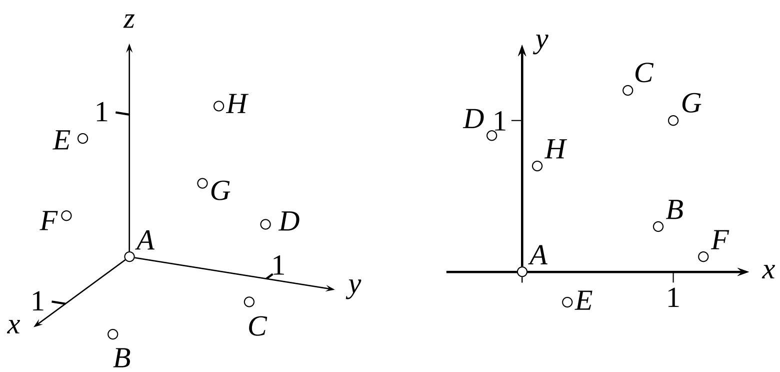


Abbildung 6.10: Gedrehter Einheitswürfel im Schrägbild und als Projektion