Aus U. Stammbach: Lineare Algebra

**2.13** <u>Satz</u> . *Es sei* $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ *eine Basis von* $V$ *und* $\beta_1, \cdots, \beta_n$ *seien beliebige Vektoren von* $W$ . *Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung* $f : V \longrightarrow W$ *mit* $f(\alpha_i) = \beta_i$ , $i = 1, \cdots, n$ .

Beweis . Es sei $\xi$ ,

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$$

ein beliebiger Vektor aus $V$ . Da $x_1, \cdots, x_n$ durch den Vektor $\xi$ eindeutig bestimmt sind , lässt sich $f : V \longrightarrow W$ definieren durch

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i \quad .$$

Es ist klar , dass $f(\alpha_i) = \beta_i$ , $i = 1, \cdots, n$ . Um zu zeigen , dass $f$ linear ist , sei

$$\eta = \sum_{i=1}^{n} y_i \alpha_i \quad .$$

Dann folgt

$$f(a\,\xi + b\,\eta) = f\left(a \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i + b \sum_{i=1}^{n} y_i \alpha_i\right) =$$

$$= f\left(\sum_{i=1}^{n} (a\,x_i + b\,y_i)\alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (a\,x_i + b\,y_i)\beta_i =$$

$$= a \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i + b \sum_{i=1}^{n} y_i \beta_i = a\,f(\xi) + b\,f(\eta) \quad .$$

Damit ist $f$ linear . Es bleibt zu zeigen , dass $f$ eindeutig bestimmt ist . Es sei $g : V \longrightarrow W$ eine weitere lineare Abbildung mit $g(\alpha_i) = \beta_i$ , $i = 1, \cdots, n$ . Dann folgt aus der Linearität von $g$ sofort

$$g(\xi) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i g(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \beta_i = f(\xi) \quad .$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen .

## III.3 Matrizen

3.1 Es sei $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung , und es seien $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ eine Basis von $V$ und $\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ eine Basis von $W$ . Nach Satz 2.13 ist $f$ eindeutig bestimmt durch die Bilder $f(\alpha_k)$ der Basisvektoren . Es gelte

$$(*) \qquad \boxed{f(\alpha_k) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\beta_i} \quad , \quad k = 1, \cdots, n \; .$$

Ist $\alpha$ ein beliebiger Vektor aus $V$ , so lässt sich $f(\alpha)$ wie folgt bestimmen . Es sei

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} x_k\alpha_k \quad , \quad f(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} y_i\beta_i \; .$$

Dann gilt

$$f(\alpha) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\alpha_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\beta_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right)\beta_i \; .$$

Für die Koordinaten $y_1, \cdots, y_m$ von $f(\alpha)$ bezüglich der Basis $\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ erhalten wir somit

$$(**) \qquad \boxed{y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k} \quad , \quad i = 1, \cdots, m \; .$$

3.2 <u>Satz</u> . *Ist* $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ *eine Basis von* V *und* $\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ *eine Basis von* W *, dann wird die lineare Abbildung* $f : V \longrightarrow W$ *vollständig durch eine* $m \times n$ *- Matrix* A *,*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

*beschrieben . Dabei stehen in der* k*-ten Spalte von* A *gerade die Koordinaten des Vektors* $f(\alpha_k)$ *bezüglich der Basis* $\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ .

3.3 <u>Definition</u> . Die Matrix A heisst die *zu* f *gehörige Matrix bezüglich der Basen* $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ *und* $\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$ .

3.4 Schreiben wir die Koordinaten des Vektors $\alpha$ als $n \times 1$ - Matrix und die Koordinaten des Vektors $f(\alpha)$ als $m \times 1$ - Matrix ,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} , \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} ,$$

so wird die Abbildung f beschrieben durch

$$(***) \qquad \boxed{Ax = y} \ .$$

3.5 Beispiel . Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3)$ . Bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ gehört zu f die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

Wählt man in $\mathbb{R}^3$ die Basis $\{(1,1,0), (0,1,1), (1,1,1)\}$ und in $\mathbb{R}^2$ die Standardbasis , so gehört zu f die Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$