Kapitel 3

§1 Die reelle euklidische Ebene

Einführung

Die reelle euklidische Ebene ist nach dem griechischen Mathematiker Euklid (* ca. 365 v. Chr.; † 300 v. Chr.) benannt. In seinem berühmtesten Werk „die Elemente“ leitete Euklid die Eigenschaften von geometrischen Objekten und den ganzen Zahlen aus Axiomen her. Dieses Buch war an vielen Lehranstalten bis ins 20. Jahrhundert Grundlage des Geometrieunterrichts.

Euklid ist als historische Persönlichkeit jedoch nicht gesichert; so gibt es auch die These, dass „die Elemente“ nicht von einer Person, sondern von mehren Mathematikern zusammen geschrieben wurden.
Quelle: "http://de.wikipedia.org/wiki/Euklid"

Für diesen Vortrag wurde die Struktur des Buches „Koecher – Krieg, Ebene Geometrie, 2. Auflage, Springer-Verlag“ übernommen.

1. **Das Skalarprodukt**
2. **Das orthogonale Komplement**
3. **Zusammenhang von $\langle x, y\rangle$ und $[x, y]$**
4. **Betrag und Abstand**
5. **Winkel**
6. **Die orthogonale Gruppe**
7. **Bewegungen**
8. **Kongruenz und Ähnlichkeit**

1. Das Skalarprodukt

1.1 Definition:

Die Abbildung

$$\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} : (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle := x^t y = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

ist a) symmetrisch, d.h. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
b) bilinear, d.h. linear in jedem Argument
c) positiv definit, d.h. $\langle x, x\rangle > 0 \quad \forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^2$
d) nicht ausgeartet, d.h. aus $\langle x, y\rangle = 0$ für alle $y \in \mathbf{R}^2$ folgt $x = 0$

Man nennt $\langle x, y\rangle = x^t y$ das euklidische Skalarprodukt von x und y.

Beweis:

Siehe lineare Algebra I

1.2 Satz:

Es gilt: $xy^t = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 \\ x_2y_1 & x_2y_2 \end{pmatrix}$ ist eine reelle 2x2 Matrix.

Weiter gilt $Spur(xy^t) = x^t y$

Beweis:

Siehe lineare Algebra I

Zur Erinnerung: Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine 2x2 Matrix, dann gilt $Spur(M) = a + d$

1.3 Definition:

Zwei Vektoren x und y heißen orthogonal, wenn gilt $\langle x, y\rangle = 0$

1.4 Definition:

Den Vektorraum $\mathbf{R}^2$ zusammen mit dem euklidischen Skalarprodukt nennt man auch die reelle euklidische Ebene. Man schreibt dafür: $E := (\mathbf{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, an Stelle von $x \in \mathbf{R}^2$ schreibt man dann auch $x \in E$

2. Das orthogonale Komplement

2.1 Definition:

Die Abbildung $E \to E; x \mapsto x^\perp := Jx = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ mit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ beschreibt eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ gegen den Uhrzeigersinn.

Es gilt: a) $\langle x, x^\perp\rangle = x_1(-x_2) + x_2x_1 = 0$

b) $\langle x^\perp, y\rangle = (-x_2)y_1 + x_1y_2 = -(x_2y_1 - x_1y_2) = -(x_1(-y_2) + x_2y_1) = -\langle x, y^\perp\rangle$

c) $\langle x^\perp, y^\perp\rangle = (-x_2)(-y_2) + x_1y_1 = x_1y_1 + x_2y_2 = \langle x, y\rangle$

d) $(x^\perp)^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}^\perp = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = (-x)$

x und $x^\perp$ sind stets orthogonal.

2.2 Satz:

Für $0 \neq a \in E$ bilden $a, a^{\perp}$ eine Basis von E

Beweis:

Siehe lineare Algebra I – max. linear unabhängiges Erzeugendensystem.

Folgerung:
Jedes $x \in E$ lässt sich wie folgt durch diese Basis darstellen:

$$x = \alpha a + \beta a^{\perp}, (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

Zur Berechnung von α und β wendet man auf $x = \alpha a + \beta a^{\perp}$ das Skalarprodukt mit a bzw. $a^{\perp}$ an und löse nach α bzw. β auf.

$$x = \underbrace{\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle}}_{\alpha} a + \underbrace{\frac{\langle a^{\perp}, x\rangle}{\langle a^{\perp}, a^{\perp}\rangle}}_{\beta} a^{\perp}, a \neq 0$$

(Verfahren zur Berechnung von α und β: Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren)

2.3 Lemma:

Für $0 \neq a \in E$ ist $\langle a, x\rangle = 0$ gleichwertig mit $x \in \mathbf{R}a^{\perp}$
Beweis:
„=>“ Angenommen $x \notin \mathbf{R}a^{\perp}$ dann besitzt x eine Darstellung im Sinne von 2.2 wobei $\alpha \neq 0$
Dann wäre das Skalarprodukt $\langle a, x\rangle = \alpha |a|^2 \neq 0$ Wid.
„<=“ klar

2.4 Bemerkung:

Die Einführung der Basis $a, a^{\perp}$ an Stelle der kanonischen Basis von E bedeutet geometrisch den Übergang zu einem neuen Koordinatensystem.

3. Zusammenhang von $\langle x, y\rangle$ und $[x, y]$

3.1 Bemerkung:

Aus Kapitel II ist die Determinantenfunktion

$$(x, y) \mapsto [x, y] = \det(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

bekannt.

Doch wie hängen $\langle x, y\rangle$ und $[x, y]$ zusammen?

Es gilt: $[x, y] = x_1 y_2 - x_2 y_1 = -(x_1(-y_2) + x_2 y_1) = -\langle x, y^{\perp}\rangle = \langle x^{\perp}, y\rangle$

Und: $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 = -((-x_2)y_2 - x_1y_1) = -\left[x^{\perp}, y\right] = \left[x, y^{\perp}\right]$

3.2 Satz: (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung ist eine direkte Folge der folgenden algebraischen Identität.

$$(x_1y_1 + x_2y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$$

In anderer Notation steht hier:

$$\langle x, y\rangle^2 + [x, y]^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

Da die Determinante eine reelle Zahl ist und das Quadrat einer reellen Zahl stets größergleich Null ist sieht man sofort die Cauch-Schwarzsche Ungleichung:

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $[x, y]$ Null wird, wenn also x und y linear abhängig sind.

4. Betrag und Abstand

4.1 Definition:

Für $x \in E$ definiert man den Betrag durch

$$|x| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Man nennt $|x|$ auch die euklidische Länge des Vektors x. Vektoren der Länge 1 heißen Einheitsvektoren.

Es gilt: a) $|0| = 0$

b) $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

c) $|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|$

d) $|x^{\perp}| = |x|$

e) $|x + y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2$

Beweis:

Die Punkte a bis d sind klar

e) $|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2$

$= x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2$

$= |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2$

4.2 Satz: (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für den Betrag folgt aus 3.2.

$$\langle x, y\rangle^2 + [x, y]^2 = \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$
$$\Rightarrow \quad \langle x, y\rangle^2 \le \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$
$$\Rightarrow \quad |\langle x, y\rangle| \le \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$$
$$\Rightarrow \quad |\langle x, y\rangle| \le |x| \cdot |y|$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

4.3 Satz: (Dreiecksungleichung für den Betrag)

Es gilt:

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn es ein $\lambda \in$ mit $x = \lambda y$

Beweis:

Herleitung:

(4.1.e) $|x+y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2$

$\le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$

$\le (|x| + |y|)^2$

$$\Rightarrow \quad |x+y| \le |x| + |y|$$

4.4 Definition: (Abstand)

Seien $x, y \in E$ so wird der Abstand von x und y durch folgende Formel erklärt:

$$d(x, y) := |x-y| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle} = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

Sofort sieht man:

Die Abstandsfunktion d ist symmetrisch.
Zwei verschiedene Punkte haben positiven Abstand zueinander.

4.5 Satz: (Dreiecksungleichung für den Abstand)

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn x, y, z auf einer Geraden liegen. Geometrisch bedeutet dies, dass in einem Dreieck die Länge jeder Seite kleiner der Summe der Längen der beiden anderen Seiten ist.

Beweis:

Herleitung:
Die Dreiecksungleichung für den Abstand wird auf die Dreiecksungleichung für den Betrag (4.3) zurückgeführt.

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x-y| = |x-z+z-y| \\ &\leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

4.6 Satz des Pythagoras:

Die Vektoren x und y sind genau dann orthogonal, wenn gilt:

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

Beweis:

$$\begin{aligned} & |x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 \\ \Leftrightarrow\quad & \left(\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle}\right)^2 = \left(\sqrt{\langle x,x\rangle}\right)^2 + \left(\sqrt{\langle y,y\rangle}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\quad & (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 \\ \Leftrightarrow\quad & x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x_1y_1 + 2x_2y_2 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2\langle x,y\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \langle x,y\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \text{x und y sind orthogonal} \end{aligned}$$

4.7 Definition:

Sei $M \subset E$ eine nicht-leere Menge und $p \in E$ ein Punkt.
Der Abstand von p zu M wird definiert durch:

$$d(p,M) := \inf\{|p-x| : x \in M\}$$

(Auf diese Definition wird in diesem Vortrag zwar nicht näher eingegangen. Da sie aber später zur Herleitung anderer Abstandzusammenhänge (z.B. Punkt – Gerade) gebraucht wird führen wir sie bereits jetzt ein)

5. Winkel

5.1. Definition:

Seien $x, y \in E$, $x, y \neq 0$. Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt dann:

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{|x| \cdot |y|} \leq 1$$

Da der Cosinus das abgeschlossene Intervall $[0, \pi]$ bijektiv auf das das abgeschlossene Intervall $[-1,1]$ abbildet, gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $\theta = \theta_{x,y}$ mit der Eigenschaft

$$\langle x, y\rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos\theta \ , \ 0 \leq \theta \leq \pi$$

Man nennt $\theta = \theta_{x,y} = \theta_{y,x}$ den Winkel zwischen x und y

5.2. Lemma:

Man liest aus der Definition folgende Beziehungen ab:

(i) $\theta_{x,-y} = \pi - \theta_{x,y}$
(ii) x, y linear abhängig $\Leftrightarrow$ $\theta_{x,y} = 0$ oder $\theta_{x,y} = \pi$
(iii) x, y orthogonal $\Leftrightarrow$ $\theta_{x,y} = \frac{\pi}{2}$

Beweis:
(i) $\langle x, -y\rangle = -1 \cdot \langle x, y\rangle = -1 \cdot |x| \cdot |y| \cdot \cos\left(\theta_{x,y}\right) = |x| \cdot |y| \cdot \cos\left(\pi - \theta_{x,y}\right)$
Damit ist dann $\theta_{x,-y} = \pi - \theta_{x,y}$

(ii) „=>“ OE: x, y linear abhängig mit gleicher Orientierung $\Leftrightarrow$ $x = k \cdot y \quad k \in \mathbb{R}^+$
Damit ist dann
$\langle x, y\rangle = \langle k \cdot y, y\rangle = k \cdot \langle y, y\rangle = k \cdot |y|^2 \cdot \cos\left(\theta_{x,y}\right)$
Aus 4.1($|\mathrm{y}| := \sqrt{\langle \mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle}$) folgt $|\mathrm{y}|^2 := \langle \mathrm{y}, \mathrm{y}\rangle$. Eingesetzt ergibt sich
$k \cdot |y|^2 \cdot \cos\left(\theta_{x,y}\right) = k \cdot |y|^2$
$\Rightarrow \cos\left(\theta_{x,y}\right) = 1 \Leftrightarrow \theta_{x,y} = 0$
Falls sie nicht die gleiche Orientierung haben, wende (i) an und führe es auf den angenommenen Fall zurück
Mit (i) folgt in diesem Fall $\cos\left(\theta_{x,y}\right) = -1 \Leftrightarrow \theta_{x,y} = \pi$

„<=“ $\theta_{x,y} = 0$ oder $\theta_{x,y} = \pi$
=> $\cos(\theta_{x,y}) = \pm 1$
=> $\langle x, y\rangle = (\pm 1)|x||y|$. 4.2 besagt, dass x, y linear abhängig sind.

(iii) x, y orthogonal

$\Leftrightarrow \ \langle x, y\rangle = |x|\cdot|y|\cdot\cos\theta_{x,y} = 0 \Leftrightarrow \cos\theta_{x,y} = 0 \Leftrightarrow \ \theta_{x,y} = \frac{\pi}{2}$

da nach Voraussetzung $0 \le \theta_{x,y} \le \pi$

5.3 Cosinus-Satz:

Sind $x, y \in E \setminus \{0\}$, so gilt:

$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2\cdot|x|\cdot|y|\cdot\cos\theta_{x,y}$$

Beweis:

$|x-y|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle -y, -y\rangle - 2\cdot\langle x, y\rangle$

$= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\cdot\langle x, y\rangle = |x|^2 + |y|^2 - 2\cdot|x|\cdot|y|\cdot\cos\theta_{x,y}$

5.4 Proposition:

Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ gegeben, dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in \mathbb{R}$ mit

$\alpha = \cos(\varphi),\ \beta = \sin(\varphi),\ 0 \le \varphi < 2\pi$

Beweis: siehe Analysis I [1]

5.5 Korollar:

Zu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt es $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $\alpha\cdot\cos(\varphi) + \beta\cdot\sin(\varphi) = 0$

Beweis:
Ohne Einschränkung $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ (sonst $\alpha = \beta = 0$)

Nun gilt für

$\gamma := \frac{-\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ und $\delta := \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$: $\gamma^2 + \delta^2 = 1$

Nach 5.4 existiert nun ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $\gamma = \cos(\varphi),\ \delta = \sin(\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi$
Einsetzen ergibt die Gültigkeit des Satzes!

[1] Siehe S 86/87 Forster, Otto: Analysis I . Differential – und Integralrechnung einer Veränderlichen . 4. durchgesehene Auflage 1992, Vieweg: Braunschweig

5.6 Definition:

Für ein $\varphi \in \mathbb{R}$ definiert man den Einheitsvektor $e(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

Offensichtlich ist, dass: $e(\varphi)^{\perp} = e\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

5.7 Lemma: (Polarkoordinaten)

Zu $0 \neq x \in E$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in \mathbb{R}$ mit:

$x = |x| \cdot e(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Beweis:

Schreibe x in der Form $|x| \cdot \frac{1}{|x|} \cdot x = |x| \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit $\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = 1$. Wende hierauf 5.4 an.

5.8 Folgerungen:

Mit Hilfe der Additionstheoreme des Cosinus erhält man:

(i) $\langle e(\varphi), e(\psi) \rangle = \cos\varphi \cdot \cos\psi + \sin\varphi \cdot \sin\psi = \cos(\varphi - \psi)$

(ii) aus (i) erhält man mit 5.1

$$\theta_{x,y} = (\varphi - \psi) \pm \mathbb{N} \cdot 2 \cdot \pi \text{ mit } x = e(\varphi) \text{und } y = e(\psi)$$

(iii) 5.1 und 3.2 ergeben:

$$\begin{aligned}
&\langle x, y \rangle^2 + [x, y]^2 = \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \\
&\Leftrightarrow \left(|x| \cdot |y| \cdot \cos\theta_{x,y}\right)^2 + [x, y]^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 \\
&\Leftrightarrow [x, y]^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 \cdot \left(1 - \cos^2(\theta_{x,y})\right) \\
&\Leftrightarrow [x, y]^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 \cdot \left(\sin^2(\theta_{x,y})\right) \\
&\Leftrightarrow \left\|[x, y]\right\| = |x| \cdot |y| \cdot \left(\sin(\theta_{x,y})\right)
\end{aligned}$$

(iv) 5.1 und (iii) ergeben

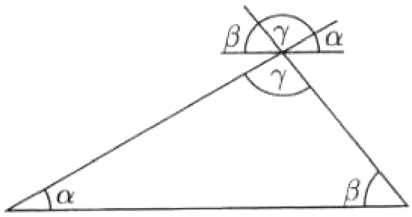
$$\tan(\theta_{x,y}) = \frac{\left\|[x, y]\right\|}{\langle x, y \rangle} \quad , \quad \text{falls} \quad \langle x, y \rangle \neq 0$$

5.9. Definition:

Ist nun a,b,c ein Dreieck in E, d.h. $[a,b,c] \neq 0$, so definiert man den Winkel bei a bzw. b bzw. c bzw. durch $\alpha = \theta_{b-a,c-a}$ bzw. $\beta = \theta_{c-b,a-b}$ bzw. $\gamma = \theta_{a-c,b-c}$.
Dann heißen α, β, γ die Winkel des Dreiecks

5.10. Winkelsummen-Satz:

Die Summe der Winkel in einem Dreieck in E ist π.



Beweis: O.E. $a = 0$ dann ergeben sich die Winkel wie mit 5.1 und 5.8 (iii) folgt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle b,c\rangle}{|b|\cdot|c|} \quad , \quad \sin(\alpha) = \frac{\|[b,c]\|}{|b|\cdot|c|}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\langle c-b,-b\rangle}{|b|\cdot|b-c|} = \frac{|b|^2 - \langle c,b\rangle}{|b|\cdot|b-c|} \quad , \quad \sin(\beta) = \frac{\|[c-b,-b]\|}{|b|\cdot|b-c|} = \frac{\|[b,c]\|}{|b|\cdot|b-c|}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\langle -c,b-c\rangle}{|c|\cdot|b-c|} = \frac{|c|^2 - \langle c,b\rangle}{|c|\cdot|b-c|} \quad , \quad \sin(\gamma) = \frac{\|[b-c,-c]\|}{|c|\cdot|b-c|} = \frac{\|[b,c]\|}{|c|\cdot|b-c|}$$

Betrachte nun:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

Einsetzen der obigen Beziehungen ergibt:

$$\frac{\langle b,c\rangle\cdot\left(|b|^2 - \langle b,c\rangle\right) - [b,c]^2}{|b|^2\cdot|c|\cdot|b-c|} = \frac{\langle b,c\rangle - |c|^2}{|c|\cdot|b-c|} = -\cos\gamma = \cos(\pi-\gamma)$$

Analog:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) = \sin\gamma = \sin(\pi-\gamma)$$

Da $0 < \alpha+\beta, \pi-\gamma < 2\cdot\pi$ erhält man aus 5.4 $\alpha+\beta = \pi-\gamma$

6. Die orthogonale Gruppe

6.1. Definition:

Die Gruppe der reellen orthogonalen 2 x 2 Matrizen wird mit $O(2)$ bezeichnet, also

$$O(2) := \left\{ T \in Mat\left(2,\mathbb{R}\right) : T^tT = E_2 \right\}$$

6.2 Äquivalenzsatz für orthogonale Matrizen:

Für eine reelle 2 x 2 Matrix T sind äquivalent:

(i) T ist orthogonal
(ii) T^t ist orthogonal
(iii) T ist invertierbar und es gilt $T^{-1} = T^t$
(iv) $T = (a,b)$ mit $a,b \in E$ und $|a| = |b| = 1,\ \ \langle a,b \rangle = 0$
(v) $|T \cdot x| = |x|, \forall x \in E$
(vi) $\langle T \cdot x, T \cdot y \rangle = \langle x, y \rangle, \ \ \forall x, y \in E$

Insbesondere gilt $\det(T) = \pm 1$

Beweis:

aus dem Determinantenproduktsatz und der Definition der Gruppe O(2) folgt sofort:

$$1 = \det\left(T^tT\right) = \det\left(T^t\right) \cdot \det(T) = \det(T)^2$$
$$\Leftrightarrow \det(T) = \pm 1$$

Somit folgt automatisch (iii) da die Matrix nun invertierbar ist.

(i) => (ii): wissen: $E_2 = T^tT \Leftrightarrow E_2^{-1} = T^{-1}T^{t^{-1}} \Leftrightarrow TT^t = E_2$
da $\left(T^t\right)^t = T$ folgt die Behauptung

(ii) => (i) wie oben klar

(iv) $\Leftrightarrow$ (i): Es gilt $T^tT = \begin{pmatrix} a^t \\ b^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^ta & a^tb \\ b^ta & b^tb \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & \langle a,b \rangle \\ \langle a,b \rangle & |b|^2 \end{pmatrix} = E_2$

Damit folgt (i) sofort aus (iv).

(i) => (v) klar, da $T^tT = E_2$ und $|x|^2 = x^tx$
Denn $|Tx|^2 = (Tx)^t Tx = x^tT^tTx = x^tx = |x|^2$

(v) => (vi)
$$\langle T(x+y), T(x+y) \rangle = |Tx|^2 + 2\langle Tx, Ty \rangle + |Ty|^2 = |T(x+y)|^2 = |x+y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2$$

(vi) => (i)
Setze die Standardeinheitsvektoren in (vi) ein.

6.3 Definition:

Für $\varphi \in \mathbb{R}$ definiert man:

$$T(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

6.4 Folgerungen:

Man weiß bekanntlich:

(i) $T \in O(2),\ \det(T) = 1 \Leftrightarrow T = T(\varphi)$ für ein $\varphi \in \mathbb{R}$
(ii) $T \in O(2),\ \det(T) = 1 \Leftrightarrow T = S(\varphi)$ für ein $\varphi \in \mathbb{R}$

(iii) Über die Additionstheoreme ergibt sich:
$T(\varphi)e(\psi) = e(\varphi + \psi)$ und $S(\varphi)e(\psi) = e(\varphi - \psi)$

Somit beschreibt die Abbildung:

(iv) $E \to E,\ x \mapsto T(\varphi)x$, eine Drehung um den Winkel φ

(v) $E \to E,\ x \mapsto S(\varphi)x$, eine Spiegelung an der Geraden $\mathbb{R} \cdot e\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

(vi) Insbesondere gilt $T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J$ und $T\left(\frac{\pi}{2}\right)x = x^{\perp}$ (J siehe 2.1)

6.5 Definition:

Die Untergruppe $SO(2) := \{T \in O(2) : \det(T) = 1\}$ von O(2) heißt spezielle orthogonale Gruppe und besteht aus allen Drehungen $T(\varphi)$.

6.6 Bemerkung:

Alle Matrizen dieser Gruppe erfüllen die Identität

$$[Tx, Ty, Tz] = \det(T) \cdot [x, y, z]$$

7. Bewegungen

7.1 Definition:

Eine Abbildung $f: E \to E$ mit den Eigenschaften:

$$\left|f(x) - f(y)\right| = |x - y| \quad \forall x, y \in E$$

Nennt man eine Bewegung bzw. euklidische Bewegung.

7.2 Satz:

Die Bewegungen von E sind genau die Abbildungen

$$E \to E,\ x \mapsto T \cdot x + q \quad \text{mit } T \in O(2), q \in E$$

(somit sind die Bewegungen aus Translationen, Drehungen und Spiegelungen zusammengesetzt. Bzgl. Komposition bildet diese Menge eine Gruppe)

Beweis:

Nach Teil (v) des Äquivalenz-Satzes (6.2) für orthogonale Matrizen ist klar, dass diese Abbildungen Bewegungen sind.

Betrachte nun

$f: E \to E$ eine beliebige Bewegung. O.E. $f(0) = 0$.

Dann ist

$\left|f(x)\right| = |x|$ und $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$

Die erste Gleichung folgt unmittelbar aus der Definition 7.1 wenn man $y = 0$ setzt. Die zweite Gleichung wird auch aus dieser Definition hergeleitet.

$$\begin{aligned}
&\left|f(x) - f(y)\right| = |x - y| \quad \forall x, y \in E \\
\Leftrightarrow &\left|f(x) - f(y)\right|^2 = |x - y|^2 \\
\Leftrightarrow &\left\langle f(x) - f(y), f(x) - f(y)\right\rangle = \left\langle x - y, x - y\right\rangle \\
\Leftrightarrow &\left\langle f(x), f(x)\right\rangle + \left\langle f(y), f(y)\right\rangle - 2\left\langle f(x), f(y)\right\rangle = \left\langle x, x\right\rangle + \left\langle y, y\right\rangle - 2\left\langle x, y\right\rangle \\
\Leftrightarrow &\left|f(x)\right|^2 + \left|f(y)\right|^2 - 2\left\langle f(x), f(y)\right\rangle = |x|^2 + |y|^2 - 2\left\langle x, y\right\rangle \\
\Leftrightarrow &|x|^2 + |y|^2 - 2\left\langle f(x), f(y)\right\rangle = |x|^2 + |y|^2 - 2\left\langle x, y\right\rangle \\
\Leftrightarrow &\left\langle f(x), f(y)\right\rangle = \left\langle x, y\right\rangle
\end{aligned}$$

Damit berechnet man

$$\left| f(x+y) - f(x) - f(y) \right|^2 = \langle f(x+y) - f(x) - f(y), f(x+y) - f(x) - f(y) \rangle$$
$$= \left| f(x+y) \right|^2 + \left| f(x) \right|^2 + \left| f(y) \right|^2 - 2\langle f(x), f(x+y) \rangle - 2\langle f(y), f(x+y) \rangle + 2\langle f(x), f(y) \rangle$$
$$= |x+y|^2 + |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x+y, x+y \rangle + 2\langle x, y \rangle$$
$$= |x+y|^2 + |x|^2 + |y|^2 - 2|x+y|^2 + 2\langle x, y \rangle$$
$$= |x|^2 + |y|^2 - |x+y|^2 + 2\langle x, y \rangle$$
$$= |x|^2 + |y|^2 - \left(|x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2 \right) + 2\langle x, y \rangle = 0$$

Und erhält somit $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Analog folgt $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$

$$\left| f(a \cdot x) - a \cdot f(x) \right|^2 = \langle f(a \cdot x) - a \cdot f(x), f(a \cdot x) - a \cdot f(x) \rangle$$
$$= \langle f(a \cdot x), f(a \cdot x) \rangle + \langle a \cdot f(x), a \cdot f(x) \rangle - 2 \cdot \langle a \cdot f(x), f(a \cdot x) \rangle$$
$$= \langle a \cdot x, a \cdot x \rangle + a^2 \langle x, x \rangle - 2 \cdot a \cdot \langle f(x), f(a \cdot x) \rangle$$
$$= \langle a \cdot x, a \cdot x \rangle + a^2 \langle x, x \rangle - 2 \cdot a \cdot \langle x, a \cdot x \rangle$$
$$= a^2 \langle x, x \rangle + a^2 \langle x, x \rangle - 2 \cdot a^2 \cdot \langle x, x \rangle = 0$$

Daher ist $f : E \to E$ ein Homomorphismus der Vektorräume, es gibt daher eine 2 x 2 Matrix T mit $f(x) = Tx$ wobei speziell gilt $|Tx| = |x|$ für alle $x \in E$. Nach Äquivalenzsatz folgt T ist orthogonal.

7.3. Korollar:

Eine Bewegung lässt Winkel zwischen Geraden invariant.

Beweis:

Verschiebe den Schnittpunkt der Geraden in den Nullpunkt und beachte, dass für die Richtungsvektoren folgendes gilt:

$\left| f(x) \right| = |x|$ und $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

somit folgt die Behauptung sofort.

8. Kongruenz und Ähnlichkeit

8.1 Definition:

Zwei Dreiecke a,b,c und a',b',c' in E heißen kongruent, wenn die entsprechenden Seitenlängen übereinstimmen, d.h.

$|a-b| = |a'-b'|$, $|b-c| = |b'-c'|$ und $|c-a| = |c'-a'|$

8.2 Satz:

Für zwei Dreiecke a,b,c und a',b',c' in E sind äquivalent:

(i) a,b,c und a',b',c' sind kongruent
(ii) Es gibt eine Bewegung f mit $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$

Daher werden Bewegungen auch Kongruenzabbildungen genannt.

Beweis:

(ii) => (i): Man wende 7.2 und den Teil (v) des Äquivalenzsatzes an

(i) => (ii): Für kongruente Dreiecke existiert eine Abbildung
$f \in Aff(2,\mathbb{R})$ mit $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$
Aus dem ersten Vortrag folgt nun die Existenz
$T \in Gl(2,\mathbb{R}), q \in E$ mit $f(x) = T \cdot x + q$

Damit ergibt sich durch einsetzten nun:

$T(a-c) = a'-c'$, $T(b-c) = b'-c'$, $T(a-b) = a'-b'$

Damit ergibt sich nun

$|a-c| = |T(a-c)| = |a'-c'|$, $|b-c| = |T(b-c)| = |b'-c'|$, $|a-b| = |T(a-b)| = |a'-b'|$

Weil a,b,c ein Dreieck ist, bilden $(a-b),(b-c)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ damit folgt dann

$|Tx| = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$. Nach dem Äquivalenz-Satz folgt nun, $T \in O(2)$

Somit ist f eine Bewegung

8.3 Definition:

Zwei Dreiecke heißen ähnlich, wenn sie bis auf eine Streckung, d.h. bis auf eine Abbildung der Form $x \mapsto \rho x, \quad \rho > 0$ kongruent sind.

8.4 Bemerkung:

Jede Ähnlichkeitsabbildung, d.h. jede Abbildung $f : E \to E$, die ein beliebiges Dreieck in ein dazu ähnliches abbildet, hat daher die Form

$$f(x) = \rho \cdot T \cdot x + q \quad \text{mit} \quad 0 \neq \rho \in \mathbb{R}, T \in O(2), q \in E$$

Bei Ähnlichkeitsabbildungen werden Winkel, aber nicht Abstände erhalten.