Materialien zu

Mehrstufige Prozesse

OSA Tübingen / Lehrerfortbildung 1999
J. Bemetz / Martin-Heidegger-Gymnasium Meßkirch

Vorbemerkungen

- In der Unterrichtseinheit *Mehrstufige Prozesse* werden Matrizen und Vektoren von ihrer bisherigen engen Bindung an geometrische Fragestellungen gelöst. In dieser erweiterten Sicht sind Matrizen nichts anderes als rechteckige Zahlenschemata und Vektoren sind Zahlentupel. Beide Rechenobjekte können so inhaltlich sehr vielfältig interpretiert werden, wodurch Aufgabenstellungen möglich sind, die über die geometrischen Aspekte der Linearen Algebra hinausweisen.

- *Mehrstufige Prozesse* sind dadurch gekennzeichnet, daß eine durch einen *Zustandsvektor* beschriebene Startsituation Schritt für Schritt mit Hilfe von *Übergangsmatrizen* in Folgesituationen überführt wird. Dabei kann diese Überführung durch von Stufe zu Stufe verschiedene Matrizen (z.B. Materialverflechtungen) oder durch das mehrfache Anwenden ein und derselben Matrix erfolgen (z.B. Populationsentwicklungen).

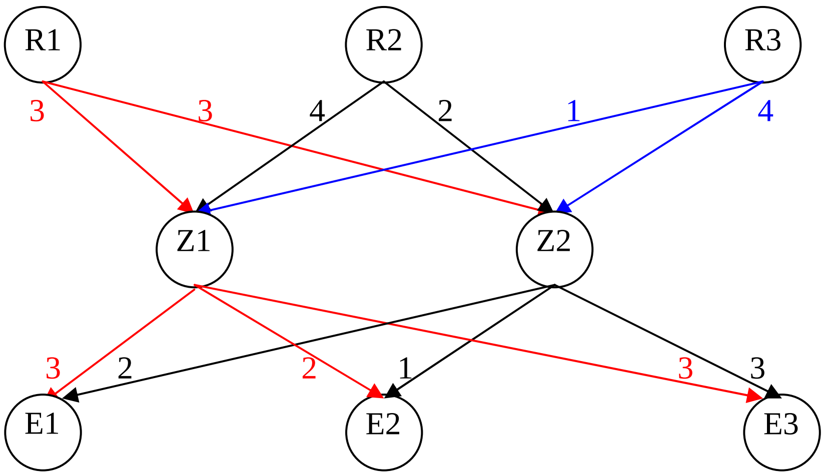
- Die drei ausführlich behandelten Beispiele dieser Materialiensammlung sind so ausgewählt, daß mit ihrer Hilfe die wichtigsten Fragestellungen und Aspekte im Zusammenhang mit *Mehrstufigen Prozessen* mit den Schülerinnen und Schülern erarbeitet werden können. Voraussetzungen sind die Matrixschreibweise linearer Gleichungssysteme ($A \cdot \vec{x} = \vec{b}$) sowie der Gaußsche Algorithmus (vgl. Lehrplaneinheit 5: Lineare Gleichungssysteme).
  Die Übungsaufgaben schließen sich unmittelbar an die Fragestellungen der Beispiele an und erweitern diese.

- Bedingt durch die Vielfalt der Anwendungsbereiche ergeben sich je nach Bereich unterschiedliche Bezeichnungsweisen. Die wichtigsten sind:
  - *Zustandvektoren* heißen auch *Verteilungsvektoren, Populationsvektoren, Startvektoren, Ausgangsvektoren, Bedarfsvektoren,* etc.
  - *Übergangsmatrizen* heißen auch *(Material-)Verflechtungsmatrizen, Input-Output-Matrizen,* etc.
  - Die *Elemente der Übergangsmatrix* heißen entsprechend auch *Übergangsfaktoren, Überlebensraten, Sterberaten, Übergangswahrscheinlichkeiten, Anteile*, etc.
  - Die Graphen zur Darstellung der Übergänge werden *Übergangsgraphen, Pfeildiagramme, Flußgraphen, Gozintographen,* etc. genannt.

- Bei der Behandlung der Unterrichtseinheit *Mehrstufige Prozesse* kann der Einsatz eines CAS sehr hilfreich sein. So können z.B. rasch die Auswirkungen veränderter Startvektoren oder veränderter Übergangsmatrizen untersucht werden. Die MAPLE-Worksheets (*MAPLE V Release 5*) zu den Beispielen 2 und 3 sind diesen Materialien angefügt.

Beispiel 1: Materialverflechtung
(Definition der Matrizenmultiplikation)

In einem Produktionsprozeß werden zur Herstellung von 2 Zwischenprodukten Z_1 und Z_2 drei verschiedene Rohstoffe R_1, R_2, und R_3 benötigt. Aus den beiden Zwischenprodukten entstehen dann 3 verschiedene Endprodukte E_1, E_2 und E_3.
Der untenstehenden Figur kann entnommen werden, wieviel Mengeneinheiten der Rohstoffe für die jeweiligen Zwischenprodukte und wieviel Mengeneinheiten der Zwischenprodukte für die jeweiligen Endprodukte benötigt werden.
Gesucht ist der Rohstoffbedarf für die verschiedenen Endprodukte.



Der Bedarf an Zwischenprodukten für die Endprodukte und der Bedarf an Rohstoffen für die Zwischenprodukte wird häufig auch in Form von Tabellen angegeben:

	Z_1	Z_2
E_1	3	2
E_2	2	1
E_3	3	3

	R_1	R_2	R_3
Z_1	3	4	1
Z_2	3	2	4

Darstellung dieser Tabellen als LGS:

$E_1 = 3Z_1 + 2\,Z_2$
$E_2 = 2Z_1 + \;Z_2$
$E_3 = 3Z_1 + 3Z_2$

$Z_1 = 3\,R_1 + 4\,R_2 + R_3$
$Z_2 = 3\,R_1 + 2R_2 \; + 4R_3$

In Matrizenschreibweise:

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Einsetzen von (2) in (1) liefert den gesuchten Zusammenhang zwischen den Endprodukten und den Rohstoffen:

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{B} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} \right) \qquad (3)$$

Dieser Zusammenhang zwischen den Endprodukten und den benötigten Rohstoffen läßt sich aber auch mit einer einzigen Matrix C beschreiben:

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}}_{C} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Dabei gibt z.B. c_{21} an, wieviel Mengeneinheiten des Rohstoffs R_1 für das Endprodukt E_2 benötigt werden ($E_2 = c_{21} \cdot R_1 + c_{22} \cdot R_2 + c_{23} \cdot R_3$).

Zur Berechnung von c_{21} benötigt man die Anzahlen der für das Endprodukt E_2 notwendigen Zwischenprodukteinheiten (2 Einheiten von Z_1 und 1 Einheit von Z_2: zweite Zeile der Matrix A) sowie die in jedem Zwischenprodukt enthaltenen Einheiten des Rohstoffs R_1 (3 Einheiten von R_1 in Z_1 und 3 Einheiten von R_1 in Z_2: erste Spalte der Matrix B).

$$c_{21} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 9$$

bzw. $$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}$$

<u>Allgemein:</u>
Um das Element c_{ik} zu erhalten, multipliziert man die Elemente der i-ten Zeile von A der Reihe nach mit den entsprechenden Elementen der k-ten Spalte von B und addiert die Produkte (Skalarprodukt der i-ten Zeile von A mit der k-ten Spalte von B).

Die so definierte Verknüpfung, die den beiden Matrizen A und B eine Matrix C zuordnet, heißt **Matrizenmultiplikation**. Wir schreiben:

$$C = A \cdot B$$

<u>Definition:</u>
Die Multiplikation $A \cdot B$ zweier Matrizen A und B ist genau dann definiert, wenn die Spaltenzahl von A gleich der Zeilenzahl von B ist. Ist A eine (m,n)-Matrix und B eine (n,p)-Matrix, so ist $C = A \cdot B$ eine (m,p)-Matrix, für deren Elemente c_{ik} gilt:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}$$

(Skalarprodukt aus i-ter Zeile von A mit k-ter Spalte von B)

Bemerkungen:

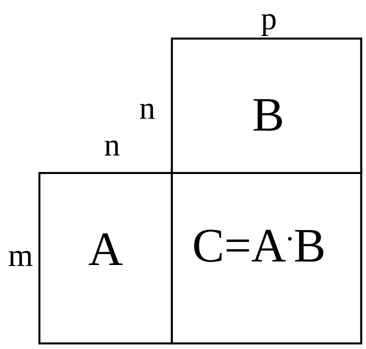
- Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ.

- Neutrales Element der Matrizenmultiplikation ist die

  Einheitsmatrix $E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, eine (n,n)-Matrix, bei der alle Elemente der Hauptdiagonalen gleich 1 und alle anderen 0 sind. Falls über n keine Unklarheit besteht, schreibt man häufig E statt E_n.

  Insbesondere gilt: $E \cdot \vec{x} = \vec{x}$ $\vec{x}$**:** Spaltenvektor

Mit dem Schema von Falk[1] läßt sich das Matrizenprodukt auf übersichtliche Weise berechnen:



Für unser Beispiel ergibt sich:

				R_1	R_2	R_3
			Z_1	3	4	1
			Z_2	3	2	4
	Z_1	Z_2				
E_1	3	2		15	16	11
E_2	2	1		9	10	6
E_3	3	3		18	18	13

Für das Endprodukt E_2 zum Beispiel benötigt man also 9 Mengeneinheiten von R_1, 10 Mengeneinheiten von R_2 und 6 Mengeneinheiten von R_3.

[1] SIGURD FALK, Professor an der TH Braunschweig

Hinweise zur inhaltlich richtigen Verknüpfung der Matrizen bei Materialverflechtungen

Die Matrizen sind immer dann inhaltlich richtig verknüpft, wenn alle Teilprozesse und der Gesamtprozeß gleiche Orientierung haben, d.h., wenn sich der Bedarf für die höhere Produktionsstufe entweder in **allen** Matrizen (auch in der Produktmatrix!) aus den Zeilen oder in **allen** Matrizen aus den Spalten ablesen läßt.

Beispiel:
Bei einem zweistufigen Produktionsprozeß sind die Materialverflechtungen durch folgende Tabellen gegeben:

	Z_1	Z_2
E_1	1	2
E_2	3	4

	R_1	R_2
Z_1	5	6
Z_2	7	8

Die folgenden beiden Modelle stellen inhaltlich richtige Verknüpfungen dar:

			R_1	R_2
		Z_1	5	6
	Z_1	Z_2	7	8
E_1	1	2	19	22
E_2	3	4	43	50

Alle Matrizen sind zeilenorientiert

			E_1	E_2
		Z_1	1	3
	Z_1	Z_2	2	4
R_1	5	7	19	43
R_2	6	8	22	50

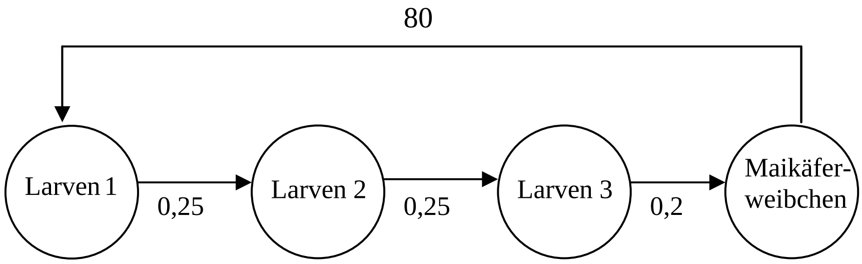
Alle Matrizen sind spaltenorientiert

Mathematischer Hintergrund:

Ist $C = A \cdot B$, dann gilt: $C^T = B^T \cdot A^T$
Die Transponierte eines Produkts ist gleich dem Produkt der Transponierten in umgekehrter Reihenfolge der Faktoren.

Beispiel 2: Maikäferpopulation
(Matrizenpotenzen, zyklische Matrizen)

Ein Maikäferweibchen legt 80 Eier und stirbt bald danach. Von den sich daraus entwickelnden Larven (Engerlinge) überleben nur ein Viertel das darauffolgende Jahr. Auch im zweiten Jahr überleben nur ein Viertel der Larven. Im dritten Jahre verpuppen sich die Larven und aus einem Fünftel von ihnen entwickeln sich im folgenden Jahr Maikäferweibchen, die wieder 80 Eier legen.



Wir untersuchen die Entwicklung einer Startpopulation aus 6000 Larven 1, 2000 Larven 2, 300 Larven 3 und 500 Käfernweibchen.

Zustandsvektor der Startpopulation:

$$\overrightarrow{p_o} = \begin{pmatrix} l_1(0) \\ l_2(0) \\ l_3(0) \\ k(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 2000 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Für die Verteilung nach einem Jahr ergibt sich:

$$\begin{aligned} l_1(1) &= 80 \cdot k(0) \\ l_2(1) &= 0{,}25 \cdot l_1(0) \\ l_3(1) &= 0{,}25 \cdot l_2(0) \\ k\ (1) &= 0{,}2 \cdot l_3(0) \end{aligned}$$

LGS in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} l_1(1) \\ l_2(1) \\ l_3(1) \\ k(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 0{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_1(0) \\ l_2(0) \\ l_3(0) \\ k(0) \end{pmatrix}$$

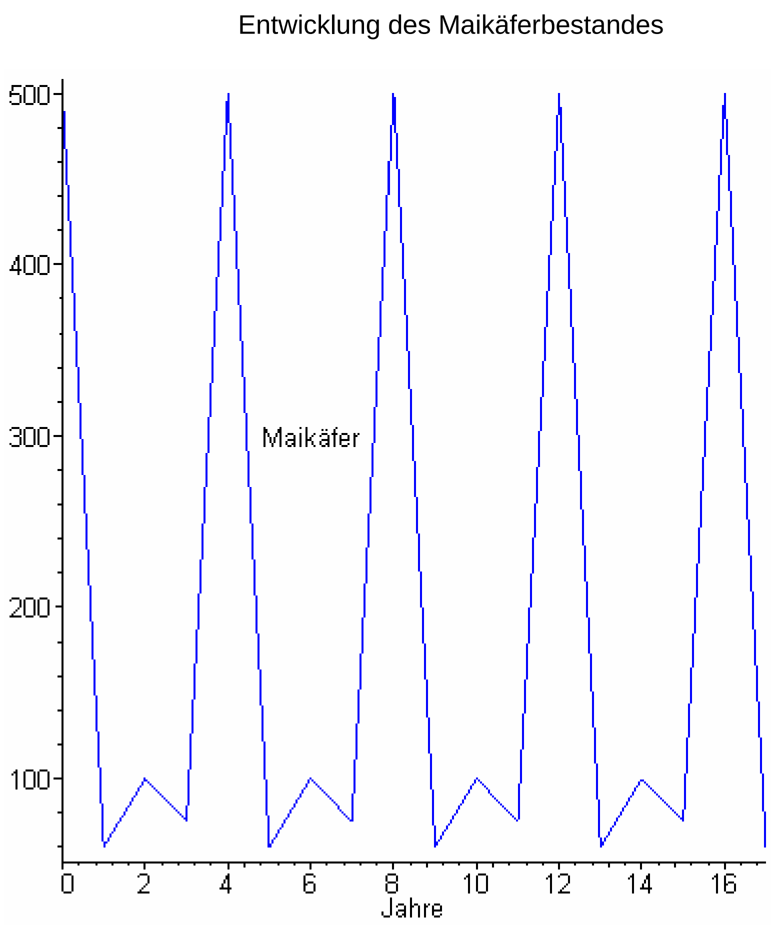
$\overrightarrow{p_1} = U \cdot \overrightarrow{p_0}$ mit der **Übergangsmatrix** U = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 80 \\ 0{,}25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$

Ausgehend vom Startvektor $\overrightarrow{p_0}$ können wir damit nun die Populationen für die folgenden Jahre berechnen:

$$\overrightarrow{p_1} = U \cdot \overrightarrow{p_0} = \begin{pmatrix} 40000 \\ 1500 \\ 500 \\ 60 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{p_2} = U \cdot \overrightarrow{p_1} = \begin{pmatrix} 4800 \\ 10000 \\ 375 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{p_3} = U \cdot \overrightarrow{p_2} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 1200 \\ 2500 \\ 75 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{p_4} = U \cdot \overrightarrow{p_3} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 2000 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix} = \overrightarrow{p_0}$$

In einem Zyklus von 4 Jahren stellt sich also wieder die Ausgangspopulation ein.



Solche vierjährigen Zyklen werden bei Maikäferpopulationen in der Natur beobachtet!

Definieren wir für quadratische Matrizen die Potenzen, so läßt sich die Ursache für dieses zyklische Verhalten rasch durchschauen:

Definition:
Unter der n-ten Potenz A^n ($n \in N$) einer quadratischen Matrix A versteht man das n-fache Produkt von A mit sich selbst. Weiter soll gelten: $A^0 = E$ (Einheitsmatrix)

Mit Hilfe der Matrizenpotenzen können wir nun schreiben:

$$\overrightarrow{p_1} = U \cdot \overrightarrow{p_0}$$
$$\overrightarrow{p_2} = U \cdot \overrightarrow{p_1} = U \cdot U \cdot \overrightarrow{p_0} = U^2 \cdot \overrightarrow{p_0}$$
$$\overrightarrow{p_3} = U \cdot \overrightarrow{p_2} = U \cdot U^2 \cdot \overrightarrow{p_0} = U^3 \cdot \overrightarrow{p_0}$$
$$\overrightarrow{p_4} = U \cdot \overrightarrow{p_3} = U \cdot U^3 \cdot \overrightarrow{p_0} = U^4 \cdot \overrightarrow{p_0}$$

Damit ist der vierjährige Zyklus dadurch gekennzeichnet, daß für die Übergangsmatrix U gilt:

$$\mathbf{U^4 = E}$$

Nachrechnen liefert für unser Beispiel sofort:

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}0625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}05 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0{,}0125 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad U^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}$$

Wir nennen Matrizen, die zu solchen Zyklen führen, **zyklische Matrizen**.

Definition:
Eine quadratische Matrix heißt zyklisch, wenn es ein $k \in N$ gibt, so daß $A^k = E$ ist.

Bemerkungen:

- Für das Auftreten des vierjährigen Zyklus ist entscheidend, daß das Produkt aus der Vermehrungsrate v und den drei Überlebensraten a_1, a_2, und a_3 gleich 1 ist.

$$\text{Aus } U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & v \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \end{pmatrix} \text{ erhält man } U^4 = \begin{pmatrix} a_1a_2a_3v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1a_2a_3v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1a_2a_3v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1a_2a_3v \end{pmatrix}$$

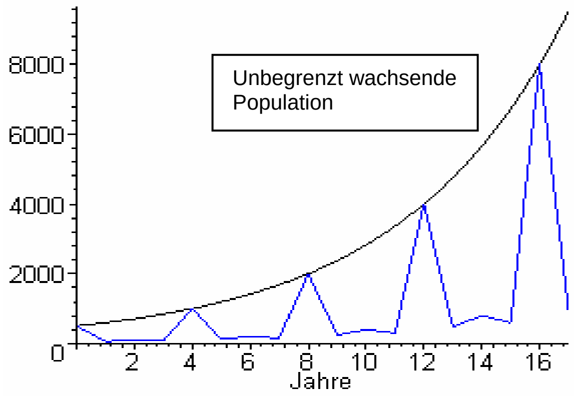
$$U^4 = E \quad \text{für} \quad a_1a_2a_3v = 1$$

- Ist $a_1 a_2 a_3 v > 1$, so wird die Maikäferpopulation langfristig zunehmen, ist dagegen $a_1 a_2 a_3 v < 1$, so wird die Population aussterben.

Beispiele:

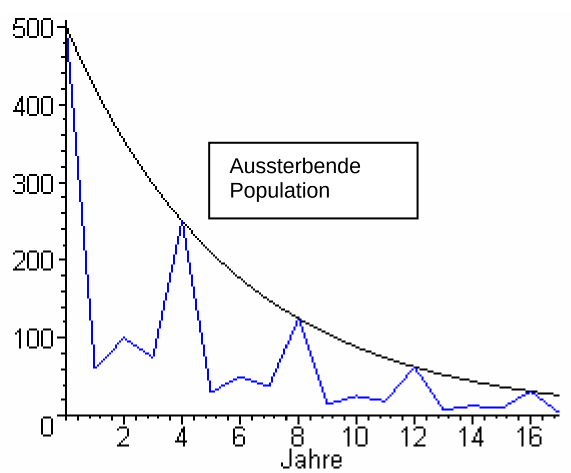
I. Verdoppelt sich z.B. wegen veränderter Umweltbedingungen bei gleichbleibenden Überlebensraten a_1, a_2 und a_3 die Vermehrungsrate v, so ergibt sich: $a_1 a_2 a_3 v = 2$.

Damit folgt: $U^4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2E$ (Verdopplung nach jeweils 4 Jahren)



II. Wird die Vermehrungsrate bei gleichbleibenden Überlebensraten dagegen halbiert, so ergibt sich: $a_1 a_2 a_3 v = 0{,}5$.

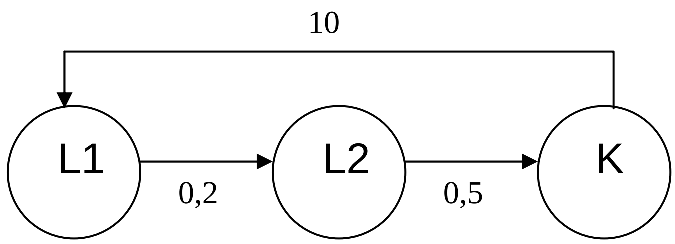
Dies führt zu $U^4 = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} = 0{,}5\,E$ (Halbierung nach jeweils 4 Jahren)



Soll der Rechenaufwand geringer gehalten werden, so bietet sich zur Einführung zyklischer Matrizen das folgende Beispiel mit einer (3,3)- Übergangsmatrix an:

<u>Entwicklung einer fiktiven Käferpopulation</u>

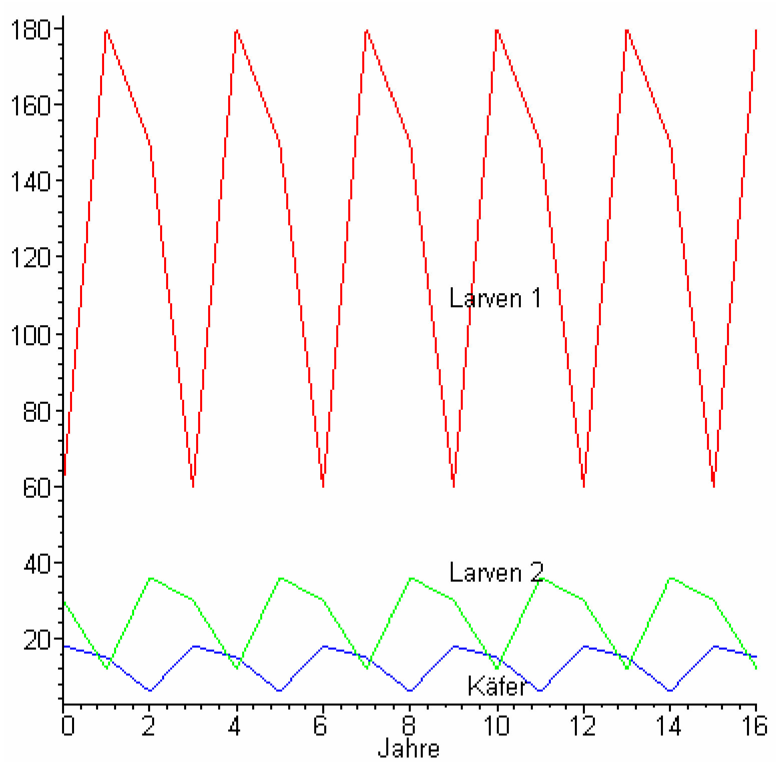
Ein Käfer legt so viele Eier, daß sich daraus im nächsten Jahr 10 Larven entwickeln. Bald danach stirbt er. Ein Fünftel dieser Larven überlebt das erste Jahr; im zweiten Jahr verpuppen sich die Hälfte der Larven und werden im dritten Jahr wieder zu einem Käfer.
Untersuche die Entwicklung einer aus anfänglich 60 einjährigen Larven (L1), 30 zweijährigen Larven (L2) und 18 Käfern bestehenden Population.



Übergangsmatrix: $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$

Mit $U^3 = E$ ergibt sich für die Entwicklung dieser Population ein Zyklus von 3 Jahren.

Diagramm:



Beispiel 3: Vererbung von Merkmalen
(stationäre Verteilung, stochastische Matrizen)

Eine Population von Insekten enthält Tiere mit zwei verschiedenen Merkmalen A und B (z.B. Farbe). Beobachtungen über längere Zeit zeigen, daß Insekten mit Merkmal A zu 70% Nachkommen mit Merkmal A und zu 30% solche mit Merkmal B haben. Insekten mit Merkmal B haben zu 80% wieder Nachkommen mit diesem Merkmal, zu 20% solche mit Merkmal A. Die Vermehrungsrate wird durch die Merkmale nicht beeinflußt.

Übergangsgraph:

$x_A(0)$ sei der Anteil der Insekten mit Merkmal A zu Beobachtungsbeginn, $x_B(0)$ entsprechend derjenige mit Merkmal B.

Für die Verteilung der Merkmale in der nächsten Generation gilt dann:

$$x_A(1) = 0{,}7\, x_A(0) + 0{,}2\, x_B(0)$$
$$x_B(1) = 0{,}3\, x_A(0) + 0{,}8\, x_B(0)$$

Die Übergangsmatrix lautet also: $U = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

Mit Hilfe des Startvektors $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} x_A(0) \\ x_B(0) \end{pmatrix}$ und der Übergangsmatrix U läßt sich die Verteilung in der n-ten Generation angegeben: (vgl. Beispiel 2):

$$\overrightarrow{x_n} = U^n \cdot \overrightarrow{x_0}$$

Durch die Berechnung der folgenden Matrizenpotenzen können wir uns einen Überblick über die Entwicklung in der Verteilung der Merkmale verschaffen:

$U^2 = \begin{pmatrix} 0{,}55 & 0{,}30 \\ 0{,}45 & 0{,}70 \end{pmatrix}$ $U^3 = \begin{pmatrix} 0{,}475 & 0{,}350 \\ 0{,}525 & 0{,}650 \end{pmatrix}$ $U^4 = \begin{pmatrix} 0{,}438 & 0{,}375 \\ 0{,}563 & 0{,}625 \end{pmatrix}$

$U^5 = \begin{pmatrix} 0{,}420 & 0{,}388 \\ 0{,}582 & 0{,}613 \end{pmatrix}$ $U^6 = \begin{pmatrix} 0{,}410 & 0{,}394 \\ 0{,}591 & 0{,}607 \end{pmatrix}$ $U^{12} = (U^6)^2 = \begin{pmatrix} 0{,}401 & 0{,}400 \\ 0{,}601 & 0{,}601 \end{pmatrix}$

Bemerkungen:
- Daß die Spaltensummen nicht genau 1 ergeben, liegt an Rundungsfehlern.
- Will man rasch zu hohen Matrizenpotenzen gelangen, so empfiehlt sich folgende Vorgehensweise:
  $A^2 = A \cdot A$; $A^4 = A^2 \cdot A^2$; $A^8 = A^4 \cdot A^4$; $A^{16} = A^8 \cdot A^8$; usw.

Vermutung: Die Matrizenfolge (U^n) nähert sich einer Grenzmatrix G mit:

$$G = \lim_{n\to\infty} U^n = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Ist dies der Fall, so wird sich auch die Verteilung auf einen Grenzvektor $\vec{x}$ hin stabilisieren. Bei einer Gleichverteilung der Merkmale in der Startpopulation ($x_A(0) = 0{,}5$ und $x_B(0) = 0{,}5$) ergibt sich:

$$\vec{x} = G \cdot \overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Auf lange Sicht wird sich also eine stabile Verteilung der Merkmale derart einstellen, daß das Merkmal A bei 40% und das Merkmal B bei 60% der Insekten vorkommt.

Die sich langfristig einstellende stabile Grenzverteilung (=stationäre Verteilung) hängt nicht von der Anfangsverteilung der Merkmale ab:

Sei $\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix}$ mit $a \in [0{,}1]$ eine beliebige Anfangsverteilung, so ergibt sich als stabile

Grenzverteilung: $\vec{x} = G \cdot \overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 0{,}4a + 0{,}4(1-a) \\ 0{,}6a + 0{,}6(1-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$

Unter der Annahme der Konvergenz der Verteilungen $\overrightarrow{x_n}$ auf eine Grenzverteilung $\vec{x}$ hin, läßt sich die Grenzverteilung auch ohne Kenntnis der Grenzmatrix berechnen.

Der Grenzvektor $\vec{x}$ ist dadurch gekennzeichnet, daß er sich unter der Wirkung der Übergangsmatrix nicht mehr verändert. Es gilt also: $U \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Auf unser Beispiel angewendet:

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung von x_A und x_B muß also ein homogenes LGS gelöst werden:

$$\begin{array}{ll} 0{,}7\, x_A + 0{,}2\, x_B = x_A & (1) \\ 0{,}3\, x_A + 0{,}8\, x_B = x_B & (2) \\ \hline -0{,}3x_A + 0{,}2x_B = 0 & (1') \\ 0{,}3x_A - 0{,}2x_B = 0 & (2') \end{array}$$

Eine Gleichung erweist sich als überflüssig . Wir wählen $x_A = t$ und erhalten dann $x_B = 1{,}5t$. Der gesuchte Grenzvektor ergibt sich als spezielle Lösung des homogenen LGS unter der Nebenbedingung: $x_A + x_B = 1$ (x_A und x_B geben die Anteile an, mit denen die Merkmale in der Population vorkommen; ihre Summe muß daher gleich 1 sein).

$t + 1{,}5\, t = 1 \Rightarrow t = 0{,}4$ Grenzvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$

Bemerkungen zur Konvergenz

Die Konvergenz der Verteilungsvektoren liegt an der speziellen Struktur der Übergangsmatrix - es handelt sich dabei um eine sogenannte **stochastische Matrix**.

Definition:
Stochastische Matrizen sind quadratische Matrizen, deren Elemente nicht negativ sind und bei denen entweder alle Spaltensummen (oder alle Zeilensummen) gleich 1 sind.

Für stochastische Matrizen gilt folgender Grenzwertsatz:

Gegeben seien eine stochastische (m,m)-Matrix U und eine Anfangsverteilung $\overrightarrow{x_0}$. Weiter gebe es eine Matrix U^k (Übergangsmatrix zur k-ten Stufe), mit mindestens einer Zeile, in der alle Elemente strikt positiv sind.

(1) Dann existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} u_{ik}(n)$ der n-stufigen Übergangswerte und es gilt:

$\lim\limits_{n\to\infty} u_{ik}(n) = g_i$ für alle i und k, wobei gilt: $\sum\limits_{i=1}^{m} g_i = 1$

Die Grenzwerte sind also unabhängig von der Spaltennummer k. Es ergibt sich:

$$\lim_{n\to\infty} U^n = \begin{pmatrix} g_1 & g_1 & \cdots & g_1 \\ g_2 & g_2 & \cdots & g_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_m & g_m & \cdots & g_m \end{pmatrix}$$

(2) $\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \cdots \\ g_m \end{pmatrix}$ ist eine von der Anfangsverteilung $\overrightarrow{x_0}$ unabhängige Grenzverteilung

(3) Diese Grenzverteilung $\vec{g}$ ist die einzige Lösung des Gleichungssystems $U \cdot \vec{x} = \vec{x}$ unter der Nebenbedingung $x_1 + x_2 + ... + x_m = 1$

Ein Beweis dieses Satzes findet sich z.B. in [8]

Sind die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt, so existiert eine Grenzmatrix und damit eine Grenzverteilung. Gemäß (3) kann diese Grenzverteilung dann durch Lösen eines LGS unter Beachtung der Nebenbedingung bestimmt werden.

<u>Hinweis:</u>

Prozesse der in Beispiel 3 beschriebenen Art nennt man auch **Markoffprozesse** (bzw. **Markoffketten**). Solche Prozesse sind bestimmt durch eine stochastische Matrix U, deren Elemente als Wahrscheinlichkeiten zu interpretieren sind, und durch einen Startvektor $\overrightarrow{x_0}$.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Ein Unternehmen produziert zwei Güter X und Y. Dafür existiert folgender Absatzplan für das erste Quartal des Jahres:

	X	Y
Jan	5	3
Feb	9	7
März	4	11

Tabelle 1

Zur Produktion der beiden Güter werden drei Einzelteile R, S und T benötigt. Der Verbrauch an Einzelteilen je Mengeneinheit der beiden Güter ergibt sich aus folgender Tabelle:

	R	S	T
X	4	2	1
Y	0	5	3

Tabelle 2

a) Bestimmen Sie für jeden Monat den Bedarf an Einzelteilen R, S und T.

b) Die drei Einzelteile werden nicht selbst produziert sondern eingekauft. Der Preis für ein Teil beträgt bei R 5 DM, bei S 2 DM und bei T 4 DM.
In welchem Monat muß für den Zukauf dieser Teile am meisten ausgegeben werden?

aus [9]

Aufgabe 2

Die folgenden Tabellen beschreiben die Zusammenhänge in einem zweistufigen Produktionsprozeß:

	Z_1	Z_2	Z_3
E_1	2	5	3
E_2	2	0	7
E_3	1	2	3

Tabelle 1

	R_1	R_2	R_3
Z_1	a	8	2
Z_2	b	1	5
Z_3	c	3	2

Tabelle 2

	R_1	R_2	R_3
E_1	25	30	35
E_2	10	37	18
E_3	11	19	18

Tabelle 3

In Z_1 sind a Mengeneinheiten von R_1, in Z_2 sind b Mengeneinheiten von R_1 und in Z_3 sind c Mengeneinheiten von R_1.

Bestimmen Sie a, b und c.

Aufgabe 3

Ein Hersteller bietet Industriehallen aus normierten Betonstahlfertigteilen an. Zur Herstellung dieser Fertigteile benötigt er die Rohstoffe Kies (R_1), Zement (R_2), Stahl (R_3) und Wasser (R_4).
Aus den Fertigteilen Wandplatte (Z_1), Stütze (Z_2) und Träger (Z_3) können drei Hallentypen (H_1), (H_2) und (H_3) montiert werden.
Die nachfolgende Tabelle gibt an, wieviel Tonnen der Rohstoffe zur Herstellung je einer Tonne der Fertigteile benötigt werden:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	0,7	0,55	0,5
R_2	0,1	0,2	0,2
R_3	0,1	0,15	0,2
R_4	0,1	0,1	0,1

Es wird davon ausgegangen, daß die Masse der bei der Fertigung eingesetzten Rohstoffe in den Zwischenprodukten erhalten bleibt. Die Halle H_1 hat die Masse 400 Tonnen, H_2 600 Tonnen und H_3 800 Tonnen.
Wieviel Tonnen der Zwischenprodukte bei den drei Hallentypen benötigt werden, entnehmen Sie folgender Tabelle:

	H_1	H_2	H_3
Z_1	240	300	320
Z_2	80	120	280
Z_3	80	180	200

a) Wieviel Tonnen der einzelnen Rohstoffe werden pro Hallentyp verarbeitet?
b) Im Lager sind noch 1712 Tonnen von R_1, 424 Tonnen von R_2 und 384 Tonnen von R_3 sowie genügend von R_4 vorrätig.
Wieviel Tonnen der einzelnen Fertigteile können mit diesen Rohstoffen produziert werden, wenn die Vorräte R_1, R_2 und R_3 vollständig aufgebraucht werden sollen?
Wieviel Tonnen von R_4 sind dazu notwendig?

Berufliche Gymnasien/Lk/Abitur 1996 aus [13]

Aufgabe 4

Bei einer Säugetierart können die jährlichen Änderungen in einer aus drei Alterstufen A1, A2 und A3 bestehenden Population durch die folgende Übergangsmatrix beschrieben werden:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix}$$ mit $v > 0$; $0 < a_1 \leq 1$; $0 < a_2 \leq 1$ (v: Vermehrungsrate, a_1,a_2 Überlebensraten)

a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen.

b) Bestimmen Sie a_1, a_2 und v so, daß sich die Population mit der Startverteilung von 1000 Tieren in A1, 500 Tieren in A2 und 100 Tieren in A3 nach zwei Jahren reproduziert.

c) Gibt es Werte für a_1, a_2 und v, so daß sich eine beliebige Startverteilung nach jeweils drei Jahren reproduziert?

aus [10]

Aufgabe 5

Die Populationsentwicklung einer Tierart wird durch die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$ beschrieben.

a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und beschreiben Sie diesen Graphen aus biologischer Sicht. (vgl. Aufgabe 4)

b) Für welchen Wert von a gibt es eine Population, die sich jährlich wiederholt? Bestimmen Sie die Altersverteilung in dieser stationären Population, wenn sie insgesamt 2600 Tiere umfaßt.

aus [10]

Aufgabe 6

Über die Population fiktiver Käfer sei folgendes bekannt: Die Hälfte aller neugeborenen Käfer überlebt den ersten Lebensmonat, ein Drittel aller einmonatigen Käfer überlebt den zweiten Monat und kein Käfer wird älter als drei Monate (es gibt also nur null, ein- und zweimonatige Käfer). Nullmonatige und einmonatige Käfer haben keine Nachkommen, zweimonatige Käfer haben im Mittel 5 Nachkommen.

a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen und stellen Sie die Übergangsmatrix U auf.

b) Berechnen Sie die Matrizenpotenz U^3 und begründen Sie damit, daß es keine stabile Startpopulation $\vec{x}$ geben kann.

c) Bestätigen Sie dies, indem Sie zeigen, daß $U \cdot \vec{x} = \vec{x}$ nur die triviale Lösung hat.

Aufgabe 7

Ein Liter Wasser (je nach Geschmack auch Wein, Bier, etc.) wird beliebig auf zwei Gefäße verteilt, die mindestens je einen Liter fassen. x_1 sei die Füllmenge von Gefäß 1, x_2 diejenige von Gefäß 2. Nacheinander wird nun zweimal umgefüllt, wobei zunächst die Hälfte des Wassers aus Gefäß 1 in das Gefäß 2 und danach die Hälfte des sich jetzt in Gefäß 2 befindlichen Wassers wieder in Gefäß 1 gefüllt wird.
Nach Vollzug dieser **beiden** Umfüllaktionen haben sich in den Gefäßen neue Füllmengen x_1' und x_2' ergeben.
Wird dieser Vorgang des zweimaligen Umfüllens sehr oft nacheinander durchgeführt, so stellt sich schließlich immer - unabhängig von der Anfangsverteilung - dieselbe stationäre Grenzverteilung ein.

a) Bestimmen Sie die Matrix U, die den Übergang von $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ zu $\vec{x}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$ beschreibt.

b) Berechnen Sie die Matrizenpotenzen U^2 und U^4. Welche Vermutung ergibt sich daraus für die Grenzmatrix G (G = $\lim\limits_{n\to\infty} U^n$).

Berechnen Sie damit die Grenzverteilung $\vec{x}_g$.

c) Für die Grenzverteilung $\vec{x}_g$ gilt auch: $U \cdot \vec{x}_g = \vec{x}_g$.
Berechnen Sie die Grenzverteilung auf diese Weise.

(Hinweis: Verteilungsvektoren haben die Komponentensumme 1)

Aufgabe 8

Eine Teilchenart T_1 kann drei Energiezustände I, II und III annehmen. Innerhalb eines festen Zeitschritts Δt ändern die Teilchen ihre Energiezustände mit folgenden Übergangs-wahrscheinlichkeiten:

- Teilchen im Zustand I bleiben zu 25% in diesem Zustand, zu 25% wechseln sie in den Zustand II und zu 50% wechseln sie in den Zustand III.
- Alle Teilchen im Zustand II wechseln in den Zustand III.
- Teilchen im Zustand III bleiben zu 50% in diesem Zustand, zu 25% wechseln sie in Zustand I und zu 25% in Zustand II.

a) Zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen und stellen Sie die Übergangsmatrix auf.

b) Zu Beginn der Beobachtung befindet sich die Hälfte der Teilchen im Zustand I, die andere Hälfte im Zustand II. Für den Verteilungsvektor der Anfangsverteilung gilt also: $\vec{v_0} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Verteilung für die nächsten vier Zeitschritte und stellen Sie daraus eine Vermutung über die Konvergenz der Verteilungsvektoren $\vec{v_n}$ für $n \to \infty$ an.

c) Berechnen Sie den Grenzvektor $\vec{v_g}$ der Folge der Verteilungsvektoren unter der Voraussetzung, daß diese Folge gegen $\vec{v_g}$ konvergiert. Interpretieren Sie die Komponenten von $\vec{v_g}$ als Wahrscheinlichkeiten.

d) Eine andere Teilchenart T_2 zeigt bis auf die Ausnahme, daß alle Teilchen, die sich im Zustand II befinden auch in diesem Zustand bleiben, dasselbe Übergangsverhalten wie die Teilchenart T_1.
Welcher stationäre Grenzvektor ergibt sich jetzt? (Konvergenz darf vorausgesetzt werden)
Wie ist dieses Ergebnis zu deuten?

Aufgabe 9

Ein bestimmtes Erscheinungsbild (z.B. die Farbe) einer Pflanzenart wird durch ein Genpaar bestimmt - jedes dieser beiden Gene kann dominant (G) oder rezessiv (g) sein. Entsprechend ordnet man den Pflanzen folgende Genotypen zu:

- GG: reinerbig dominant
- Gg: mischerbig rezessiv (hybrid)
- gg: reinerbig rezessiv

Nur bei den Typen GG und Gg tritt das entsprechende Erscheinungsbild auf.
Unter der Voraussetzung, daß die beiden Gene eines „Elternpaares“ mit gleicher Wahrscheinlichkeit an den nachfolgenden Genotyp weitergegeben werden, ergeben sich bei **Kreuzung mit einem mischerbig rezessiven Genotyp** folgende Übergangswahrscheinlichkeiten:

GG → GG:	0,5
GG → Gg:	0,5
gg → gg:	0,5
gg →Gg:	0,5
Gg → GG:	0,25
Gg → Gg:	0,5
Gg → gg:	0,25

Eine Pflanzenpopulation wird fortgesetzt mit mischerbig rezessiven Pflanzen gekreuzt.

a) Zeichnen Sie den zugehörigen Übergangsgraphen und stellen Sie die Übergangsmatrix auf.

b) Berechnen Sie unter Annahme der Konvergenz der Verteilungsvektoren die langfristig sich einstellende stationäre Verteilung der Genotypen. Welcher Prozentsatz der Pflanzen wird demnach das entsprechende Erscheinungsbild aufweisen?

vgl. [5]

Aufgabe 10

Gegeben ist die Übergangsmatrix U mit $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß für die n-te Potenz von U gilt:

$$U^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} - \frac{18}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n & \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n & \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{7} + \frac{18}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} U^n = U_g$ und zeigen Sie, daß gilt: $U_g = U \cdot U_g$ aus [3]

Lösunghinweise zu den Übungsaufgaben

Aufgabe 1

a) Tabelle 1 führt zur Verflechtungsmatrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 7 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Tabelle 2 führt zur Verflechtungsmatrix B:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Produktmatrix $C = A \cdot B$ liefert die Verflechtung zwischen den Monaten und den Einzelteilen.

			R	S	T
		X	4	2	1
	X	Y	0	5	3
Jan	5	3	20	25	14
Feb	9	7	36	53	30
März	4	11	16	63	37

b) Der Kostenvektor für die Einzelteile R, S und T ist: $\vec{k} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Die monatlichen Kosten für die Einzelteile ergeben sich dann aus: $\vec{m} = C \cdot \vec{k}$

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 20 & 25 & 14 \\ 36 & 53 & 30 \\ 16 & 63 & 37 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 206 \\ 406 \\ 354 \end{pmatrix}$$

<u>Im Februar muß also mit 406 DM die größte Summe für den Zukauf der Teile ausgegeben werden.</u>

Aufgabe 2

Schema von Falk:

				R_1	R_2	R_3
			Z_3	a	8	2
			Z_2	b	1	5
	Z_1	Z_2	Z_3	c	3	2
E_1	2	5	3	2a+5b+3c	30	35
E_2	2	0	7	2a+7c	37	18
E_3	1	2	3	a+2b+3c	19	18

Ein Vergleich mit Tabelle 3 führt sofort auf folgendes LGS:

$$\begin{aligned} 2a + 5b + 3c &= 25 \\ 2a + 7c &= 10 \\ a + 2b + 3c &= 11 \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich: <u>a = 5, b=3 und c = 0</u>.

Aufgabe 3

a) Verflechtungsmatrizen: $A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}55 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 240 & 300 & 320 \\ 80 & 120 & 280 \\ 80 & 180 & 200 \end{pmatrix}$

Beide Matrizen sind spaltenorientiert (vgl. Seite 4). Es ergibt sich folgendes Falk-Schema:

				H_1	H_2	H_3
			Z_1	240	300	320
			Z_2	80	120	280
	Z_1	Z_2	Z_3	80	180	200
R_1	0,7	0,55	0,5	252	366	478
R_2	0,1	0,2	0,2	56	90	128
R_3	0,1	0,15	0,2	52	84	114
R_4	0,1	0,1	0,1	40	60	80

So benötigt man z.B. für Hallentyp 1 252 Tonnen von R_1, 56 Tonnen von R_2, 52 Tonnen von R_3 und 40 Tonnen von R_4.

b) In a Tonnen vom Typ Z_1 sind $0{,}7 \cdot a$ Tonnen von R_1, in b Tonnen vom Typ Z_2 sind $0{,}55 \cdot b$ Tonnen von R_1 und in c Tonnen vom Typ Z_3 sind $0{,}5 \cdot c$ Tonnen von R_1
Also: $0{,}7 \cdot a + 0{,}55 \cdot b + 0{,}5 \cdot c = 1712$
Entsprechendes gilt für R_2, R_3 und R_4.

Es ergibt sich insgesamt folgendes LGS:

$$\begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}55 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1712 \\ 424 \\ 384 \\ r_4 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens können die drei Unbekannten a, b und c aus den ersten drei Gleichungen (drei Gleichungen für drei Unbekannte) ermittelt werden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}7 & 0{,}55 & 0{,}5 & 1712 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 424 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 & 384 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 70 & 55 & 50 & 171200 \\ 10 & 20 & 20 & 42400 \\ 10 & 15 & 20 & 38400 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 70 & 55 & 50 & 171200 \\ 0 & -85 & -90 & -125600 \\ 0 & -50 & -90 & -97600 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 70 & 55 & 50 & 171200 \\ 0 & -85 & -90 & 125600 \\ 0 & -35 & 0 & -28000 \end{array}\right)$$

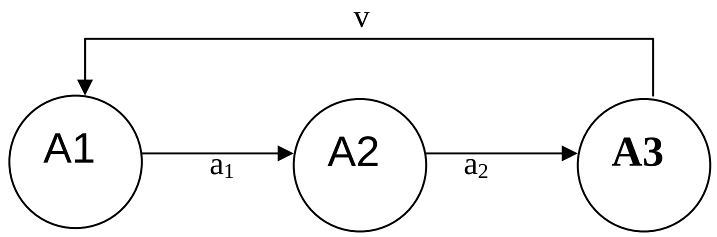
Also: b = 800, c = 640 und a = 1360

Einsetzen in die 4.Gleichung liefert: $r_4 = 280$

<u>Es lassen sich 1360 t von Z_1, 800 t von Z_2 und 640 t von Z_3 herstellen. Dazu sind 280 t von R_4 notwendig.</u>

Aufgabe 4

a)



b) Berechnung von A^2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & va_2 & 0 \\ 0 & 0 & va_1 \\ a_1a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es muß gelten: $A^2 \cdot \vec{s} = \vec{s}$ mit $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & va_2 & 0 \\ 0 & 0 & va_1 \\ a_1a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Also:

$$\begin{aligned} 500va_2 &= 1000 \quad (1) \\ 100va_1 &= 500 \quad (2) \\ 1000a_1a_2 &= 100 \quad (3) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich: $\underline{v = 10;\ \ a_1 = \frac{1}{2};\ \ a_2 = \frac{1}{5}}$

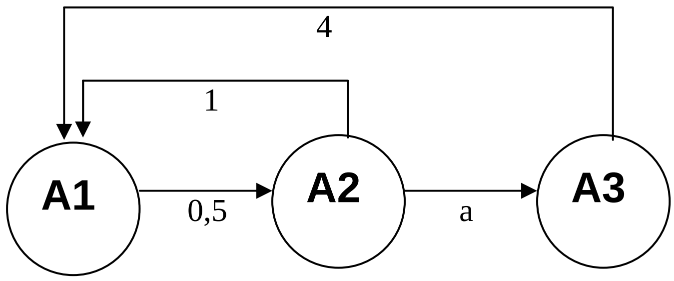
c) Berechnung von A^3 :

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & va_2 & 0 \\ 0 & 0 & va_1 \\ a_1a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2v & 0 & 0 \\ 0 & a_1a_2v & 0 \\ 0 & 0 & a_1a_2v \end{pmatrix}$$

Für einen Zyklus von drei Jahren muß gelten: $a_1a_2v = 1$. Dies ist z.B. auch für die in b) berechneten Werte erfüllt.

<u>Aufgabe 5</u>

a)



Die Population bei dieser Tierart wird in drei Altersstufen A1 (Jungtiere), A2 (ausgewachsene Tiere) und A3 (Alttiere) eingeteilt. Im Gegensatz zu Aufgabe 4 sind hierbei sowohl die ausgewachsenen Tiere als auch die Alttiere fortpflanzungsfähig.

b) Für eine stationäre Population $\vec{x}$ muß gelten:

$$T \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 0{,}5x_1 - x_2 &= 0 \\ ax_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0{,}5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & a & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a} + 4 & 0 \end{array}\right)$$

Eine nichttriviale Lösung ergibt sich für $-\frac{1}{a} + 4 = 0$, also für $\underline{a = \frac{1}{4}}$

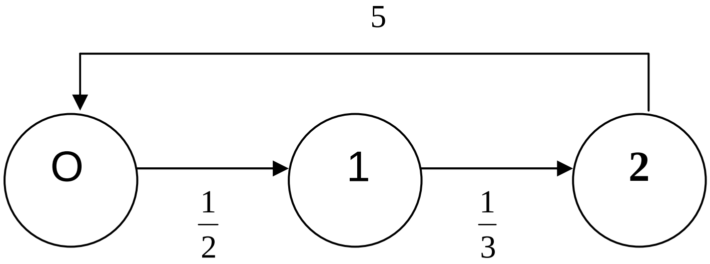
Als Lösung ergibt sich dann: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8t \\ 4t \\ t \end{pmatrix}$

Mit $x_1 + x_2 + x_3 = 2600$ ergibt sich: t=200

<u>1600 Tiere gehören zu A1, 800 zu A2 und 200 zu A3.</u>

Aufgabe 6

a)



Übergangsmatrix:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

b) $$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}5 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U^3 = U^2 \cdot U = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \frac{5}{6} \cdot E$$

Dies bedeutet, daß jede beliebige Population nach drei Monaten auf das $\frac{5}{6}$-fache abgenommen hat. Es kann daher keine stabile Population geben.

c) Für eine stabile Population müßte gelten: $U \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Das Gaußsche Eliminationsverfahren ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 5 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Das LGS hat also nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Aufgabe 7

a) Es gilt: $x_1' = 0{,}5x_1 + 0{,}5(x_2 + 0{,}5x_1)$
$x_2' = x_2 + 0{,}5x_1 - 0{,}5(x_2 + 0{,}5x_1)$

Also: $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0{,}5 \\ 0.25 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

mit $U = \begin{pmatrix} 0.75 & 0{,}5 \\ 0.25 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ als Übergangsmatrix

b) $U^2 = \begin{pmatrix} 0.69 & 0{,}63 \\ 0.31 & 0{,}34 \end{pmatrix}$ $U^4 = U^2 \cdot U^2 = \begin{pmatrix} 0.67 & 0{,}66 \\ 0.33 & 0{,}34 \end{pmatrix}$ (jeweils gerundet auf 2 Dez.)

Vermutung für die Grenzmatrix G: $G = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Mit $x_1 = a$ ($a \in [0;1]$) und $x_2 = 1 - a$ gilt für einen beliebigen Startvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 1-a \end{pmatrix}$

Damit ergibt sich für die stationäre Grenzverteilung: $\vec{x}_g = G \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

c) $U \cdot \vec{x}_g = \vec{x}_g$ führt auf das LGS: $0{,}75x_1 + 0{,}5x_2 = x_1$ (1)
$0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 = x_2$ (2)

$-0{,}25x_1 + 0{,}5x_2 = 0$ (1´)
$-0{,}25x_1 - 0{,}5x_2 = 0$ (2´)

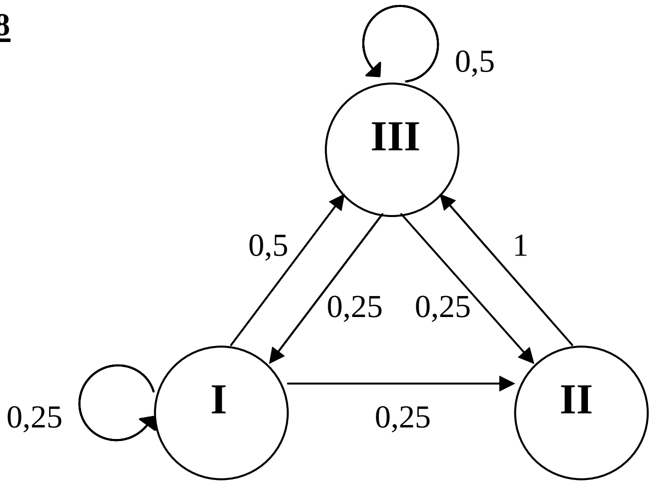
Eine Gleichung erweist sich als überflüssig: Mit $x_1 = t$ ergibt sich $x_2 = 0{,}5t$.

Aus $x_1 + x_2 = 1$ folgt: $t = \frac{2}{3}$

Damit ergibt sich in der stationären Grenzverteilung: $\underline{x_1 = \frac{2}{3} \text{ und } x_2 = \frac{1}{3}}$

Aufgabe 8

a)



Übergangsmatrix: $U = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

b) Für die nächsten drei Verteilungen ergibt sich:

$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0{,}125 \\ 0{,}125 \\ 0{,}75 \end{pmatrix}$ $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0{,}219 \\ 0{,}219 \\ 0{,}563 \end{pmatrix}$ $\vec{v_3} = \begin{pmatrix} 0{,}195 \\ 0{,}195 \\ 0{,}609 \end{pmatrix}$ $\vec{v_4} = \begin{pmatrix} 0{,}201 \\ 0{,}201 \\ 0{,}598 \end{pmatrix}$

Vermutung: Die Folge $\vec{v_n}$ der Zustandsvektoren hat den Grenzvektor $\vec{v_g} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$

c) Für $\vec{v_g}$ gilt: $U \cdot \vec{v_g} = \vec{v_g}$

LGS: $\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}75 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}25 & -1 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & -0{,}5 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}75 & 0 & 0{,}25 & 0 \\ 0{,}75 & 0 & -0{,}25 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & -0{,}5 & 0 \end{array}\right)$

Eine Gleichung ist überflüssig: Setzen von $x_3 = 3t$ liefert: $x_1 = t$ und $x_2 = t$.
Mit $x_1+x_2+x_3 = 1$ ergibt sich der in b) vermutete Grenzvektor.

<u>Interpretation:</u> Langfristig wird sich ein Teilchen mit 20% Wahrscheinlichkeit im Zustand I, mit 20% Wahrscheinlichkeit in Zustand II und mit 60% Wahrscheinlichkeit in Zustand III befinden.

d) Neue Übergangsmatrix: $U^* = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 1 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

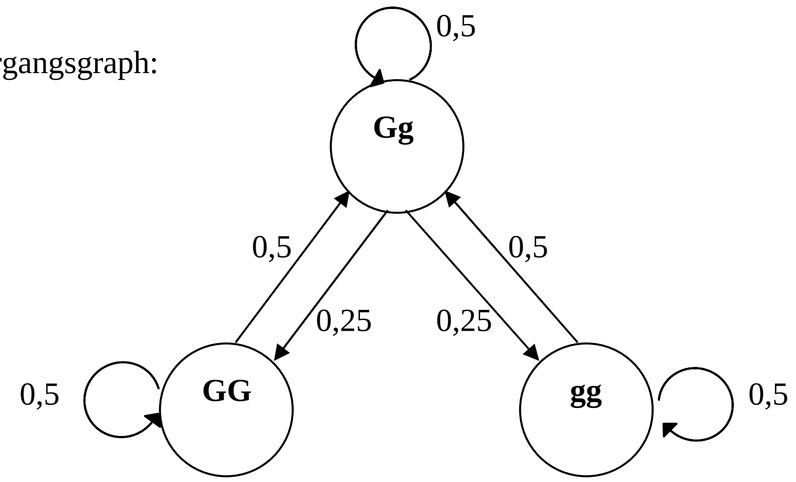
Als Lösung von $U^* \cdot \vec{v_g^*} = \vec{v_g^*}$ mit der Nebenbedingung $v_1^* + v_2^* + v_3^* = 1$ ergibt sich:

$\vec{v_g^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ <u>Interpretation:</u> Langfristig sind alle Teilchen im Energiezustand II

(Man nennt einen solchen Zustand **absorbierend**)

Aufgabe 9

a) Übergangsgraph:



Übergangsmatrix:

$$U = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$$

b) $U \cdot \vec{x} = \vec{x}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_{GG} \\ x_{Gg} \\ x_{gg} \end{pmatrix}$ führt zu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0,5 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 & -0,5 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -0,5 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & -0,25 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,25 & -0,5 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -0,5 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & -0,25 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Setzen von $x_{Gg} = 2t$ liefert $x_{gg} = t$ und $x_{GG} = t$.
Mit $x_{GG} + x_{Gg} + x_{gg} = 1$ folgt für die sich langfristig einstellende stationäre Grenzverteilung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,5 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

<u>Da sich das entsprechende Merkmal sowohl beim Genotyp GG als auch beim Genotyp Gg zeigt, werden langfristig 75% der Pflanzen dieses Erscheinungsbild aufweisen.</u>

Aufgabe 10

a) Induktionsanfang:

$$U^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} - \frac{18}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^1 & \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^1 & \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^1 \\ \frac{3}{7} + \frac{18}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^1 & \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^1 & \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = U$$

Induktionsvoraussetzung:

Für ein beliebiges $n \in N$ gelte:

$$U^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} - \frac{18}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n & \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n & \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{7} + \frac{18}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n & \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$$

Induktionsbehauptung:

$$U^{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} - \frac{18}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} & \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} & \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} \\ \frac{3}{7} + \frac{18}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} & \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} & \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} \end{pmatrix}$$

Induktionsschluß:

Nachrechnen liefert:

$$U \cdot U^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} - \frac{18}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} & \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} & \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} \\ \frac{3}{7} + \frac{18}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} & \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} & \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1} \end{pmatrix}$$

qed.

b) Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} U^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} = U_g$

$$U \cdot U_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{4}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} = U_g$$

Literaturverzeichnis:

[1] Bosch, Karl, Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler, Oldenbourg Verlag 1999
[2] Hahn/Dzewas, Lineare Algebra/Analytische Geometrie, Westermann 1996
[3] Lehmann, Eberhard, Lineare Algebra mit Vektoren und Matrizen, J.B.Metzler 1990
[4] Lehmann, Eberhard, Lineare Algebra mit dem Computer, Teubner 1983
[5] Kroll, Reiffert, Vaupel, Analytische Geometrie/Lineare Algebra, Dümmler 1997
[6] LEU-Heft M 36, Amann, Selinka, Zum anwendungsorientierten Mathematik-unterricht, Heft 3 Lineare Algebra und Analytische Geometrie, 1994
[7] LEU-Heft M 41, Wie verändert sich der Mathematikunterricht durch den Einsatz eines Computer-Algebra-Systems?, 1998
[8] Rényi, Alfréd, Wahrscheinlichkeitsrechnung, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979
[9] Schwarze, Jochen, Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler,Verlag Neue Wirtschafts-Briefe, 1996
[10] Sigma, Analytische Geometrie, Klett (vergriffen)
[11] Stopp, Friedmar, u.a., Mathematik IV (Matrizenrechnung, Lineare Optimierung), Fachbuchverlag Leipzig-Köln, 1992
[12] Trinkaus, Hans L., Probleme? Höhere Mathematik!, Springer-Lehrbuch, 1993
[13] Vohrer, Thilo, Abitur Berufliche Schulen und Fachgymnasien, Verlag T. Vohrer 1997

Eine Sammlung von Musteraufgaben des Oberschulamts Karlsruhe zum Thema "mehrstufige Prozesse“ finden sich unter:

http://www.lehrer.uni-karlsruhe.de/~za242/osa/mstproz/Muster98.html