Analysis-Aufgaben: *Differentialgleichungen 1*

1. Stelle eine Differentialgleichung auf, welche die folgende Situation darstellt:
   (Eine Lösung der Gleichung ist nicht verlangt!)

   (a) Wir nehmen an, dass die Wachstumsgeschwindigkeit für die Höhe h einer Pflanze proportional zur Höhe (d.h., je höher die Pflanze, desto schneller wächst sie) und umgekehrt proportional zur 3. Potenz ihres Alters t (d.h., mit zunehmendem Alter verringert sich die Wachstumsbereitschaft) ist.
   Stelle eine Differentialgleichung für die Funktion $h(t)$ auf.

   (b) Wir nehmen an, dass beim Freien Fall in geringer Höhe der Luftwiderstand proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit $v(t)$ ist.
   Stelle eine Differentialgleichung für $v(t)$ und für die zurückgelegte Strecke $s(t)$ auf.

2. Bestimme eine Lösung für die folgende Gleichung: $\ddot{x}(t) = -x(t)$

3. (a) Wir betrachten den Freien Fall in geringer Höhe unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes:
   Bestimme die allgemeine Lösung des AWP's, mit $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$.

   (b) Verifiziere die Lösung für den Freien Fall eines Massepunktes, der sich nicht in nähe der Erde befindet.

4. Beweise, dass

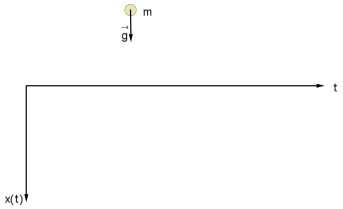
   (a) $x(t) = (1 - 2t)e^{-t}$ eine Lösung der folgenden Gleichung ist:

   $$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 0$$

   (b) $f(x) = \dfrac{2x}{(2 - x^2)}$ eine Lösung der folgenden Gleichung ist:

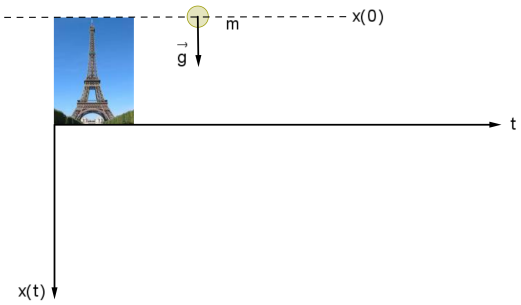
   $$y' = y^2 + \frac{y}{x}$$

5. Wir betrachten noch einmal den Freien Fall (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes) in geringer Höhe und verwenden ein Koordinatensystem mit der in der nebenstehenden Graphik verwendeten Orientierung:



   (a) Formuliere die zugehörige Differentialgleichung und die allgemeine Lösung.

   (b) Bestimme die Konstanten c_1 und c_2 für die Situation, dass wir den Freien Fall ohne Anfangsgeschwindigkeit auf dem Eiffelturm starten.



   (c) Bestimme für den Freien Fall vom Eiffelturm

      i. die Dauer des Falles bis zum Aufprall auf der Erde,

      ii. die Geschwindigkeit beim Aufprall,

      iii. die Durchschnittsgeschwindigkeit des Falles,

      iv. die notwendige Anfangsgeschwindigkeit, damit der Freie Fall nach 5s endet.