Analysis-Aufgaben: *Differentialgleichungen 4*

1. Beweise mit Hilfe einer inhomogenen, gewöhnlichen, linearen Differentialgleichunng 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten die folgende Behauptung:
   Mit $x_h(t)$ = allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung und $x_p(t)$ = eine beliebige partikuläre Lösung ist auch $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.

2. Löse die folgende inhomogene Gleichung / AWP mit Hilfe der *Variation der Konstanten*:

   (a) $\dot{x} + tx = 4t$

   (b) $t\dot{x} - x = t^2 \cdot \cos t \quad , \quad x(\pi) = 2\pi$

   Lösungen: (a) $x(t) = \tilde{C} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} + 4$

   (b) $x(t) = 2t + t \cdot \sin t$

   Bem.: Aufgabe (a) lässt sich auch gut mit Hilfe der *Separation der Variablen* lösen.

3. Löse die folgenden inhomogen Gleichungen:
   (Verwende zur Bestimmung einer partikulären Lösung den vorgegebenen Ansatz.)

   (a) $\ddot{x} - 2 \cdot \dot{x} = e^t \sin t$,
   $x_p(t) = Ae^t \sin t + Be^t \cos t$

   (b) $x^{(3)} + 2 \cdot \ddot{x} - \dot{x} - 2 \cdot x = e^t + t^2$,
   $x_p(t) = A + Bt + Ct^2 + Dte^t$

   (c) $\ddot{x} - 2 \cdot \dot{x} - 3 \cdot x = t^3 + \sin t$,
   $x_p(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + E \sin t + F \cos t$

   Lösungen: (a) $x(t) = C_1 + C_2 e^{2t} - \frac{1}{2} e^t \sin t$

   (b) $x(t) = -\frac{5}{4} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}te^t + \tilde{C}_1 e^t + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-t}$

   (c) $x(t) = \frac{40}{27} - \frac{14}{9}t + \frac{2}{3}t^2 - \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}\sin t + \frac{1}{10}\cos t + C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$

4. Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' + 2y' + y = x^2 \cdot e^x + x - \cos x$$

<u>Lösung:</u> $y = y(x) = (C_1 x + C_2) \cdot e^{-x} + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}\right) \cdot e^x + x - 2 - \frac{1}{2} \cdot \sin x$

5. Bestimme die Lösungen der folgenden AWP's:

   (a) $y'' + 10y' - 24y = 2x^2 - 6x, \quad \text{mit} \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0$

   (b) $x^{(4)} - x = 45 \cdot e^{2t}, \quad \text{mit} \quad x(0) = 6, \; \dot{x}(0) = 0, \; \ddot{x}(0) = 15, \dddot{x}(0) = 24$

   <u>Lösungen:</u>

   (a) $y = y(x) = -\frac{59}{1008} \cdot e^{2x} - \frac{59}{6048} \cdot e^{-12x} - \frac{1}{12}x^2 + \frac{13}{72}x + \frac{59}{864}$

   (b) $x = x(t) = 3 \cdot e^{-t} - 3 \cdot \sin t + 3 \cdot e^{2t}$

6. Beweise, dass sich die folgende nicht-lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$4x\dot{x} - x^2 = -(1 + t^2)$$

   mit Hilfe der Substitution $u = x^2$ in eine lineare Gleichung 1. Ordnung überführen lässt und bestimme die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

7. Bestimme diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 10\dot{x} = t^2 \cdot e^t \ ,$$

   die durch den Punkt P = (0/2) geht und dort die Steigung 1 besitzt.

8. *(freie eindimensionale Schrödingergleichung)*
   Beweise, dass eine elektromagnetische Welle

$$\psi(x,t) = a \cdot e^{i(kx - \omega t)}$$

   eine Lösung der Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$$

   ist.

   Verwende $\quad i^2 = -1 \quad , \quad \omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$