Analysis-Aufgaben: Differentialgleichungen 3

① a) gewöhnlich, linear, homogen, von 2. Ordnung & mit konst. Koeffizienten

b) $\left.\begin{array}{l} x_1(t) = e^{-t}\cdot\sin t \\ x_2(t) = e^{-t}\cdot\cos t \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists\, c = \text{const.} \in \mathbb{R}: \; x_1(t) = c\cdot x_2(t)$

$\Rightarrow$ <u>sind lin. unabhängig.</u>

$$\dot{x}_1(t) = -e^{-t}\cdot\sin t + e^{-t}\cdot\cos t$$

$$\ddot{x}_1(t) = (\cancel{e^{-t}\sin t} - e^{-t}\cdot\cos t) + (-e^{-t}\cdot\cos t - \cancel{e^{-t}\sin t})$$

$$\Rightarrow \underline{\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_1 + 2x_1} = -\cancel{2e^{-t}\cos t} + \cancel{2}\cdot(-\cancel{e^{-t}\sin t} + \cancel{e^{-t}\cos t}) + 2\cdot\cancel{e^{-t}\sin t} = \underline{0}$$

analog für $x_2(t)$.

$\square$

c) b) $\Rightarrow$ $\underline{\underline{x(t) = C_1 e^{-t}\cdot\sin t + C_2 e^{-t}\cdot\cos t}}$

② <u>Beweis:</u> i) $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ sind lin. unabhängig. ✓

ii) Zeige, daß $\underbrace{C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + C_3 x_3(t)}_{=:\, x(t)}$ eine Lösg. ist:

$$\Rightarrow \dot{x} = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t} - 2C_3 e^{-2t}$$

$$\ddot{x} = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + 4C_3 e^{-2t}$$

$$x^{(3)} = \dddot{x} = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t} - 8C_3 e^{-2t}$$

$$\Rightarrow x^{(3)} + 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x = (\cancel{C_1 e^{t}} - \cancel{C_2 e^{-t}} - \cancel{8C_3 e^{-2t}})$$
$$+ \cancel{2}(\cancel{C_1 e^{t}} + \cancel{C_2 e^{-t}} + \cancel{4C_3 e^{-2t}})$$
$$- (\cancel{C_1 e^{t}} - \cancel{C_2 e^{-t}} - \cancel{2C_3 e^{-2t}})$$
$$- \cancel{2}\cdot(\cancel{C_1 e^{t}} + \cancel{C_2 e^{-t}} + \cancel{C_3 e^{-2t}}) = 0$$

$\square$

③ & ④, siehe Aufg. Blatt