Analysis-Aufgaben: *Differentialgleichungen 5*

In dieser Aufgabenserie geht es darum, dass du geführt und weitgehend selbständig (in zweier Gruppen) lernst,

> *die reellwertigen Lösungen einer gewöhnlichen, linearen und homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, deren charkteristisches Polynom komplexe Wurzeln hat,*

zu bestimmen.

- Notwendige Vorkenntnisse:
  - mathematische Begriffsbildung,
    (obigen Text solltest du verstehen!)
  - Potenzgesetze,
  - Quadratischen Gleichungen:
    Begriffe und Lösungsformel,
  - komplexe Zahlen:
    Definition und Darstellung, Euler'sche Formel,
  - Eigenschaften der Lösungen einer Differentialgleichung,

Wir beginnen mit der allgemeinen Darstellung einer gewöhnlichen, linearen und homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

(auch ok ist eine normierte Darstellung: $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$)

Wenn die zwei verschiedenen reellwertigen Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms λ_1 und λ_2 sind, lautet die Fundamentallösung:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Damit für die reellwertigen Nullstellen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt, muss das charakteristische Polynom folgende Eigenschaft erfüllen:

$$b^2 - 4ac > 0$$

Im Falle von $\lambda_1 = \lambda_2$, muss für das charakteristische Polynom gelten

$$b^2 - 4ac = 0$$

und die daraus folgende Fundamentallösung lautet:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t},$$

$$\text{mit } \lambda = \lambda_1 = \lambda_2.$$

Damit unser charakteristisches Polynom komplex konjugierte Lösung hat, muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$b^2 - 4ac < 0$$

Formuliere ein Beispiel eines charakteristischen Polynoms, welches zwei kompkex konjugierte Lösungen hat

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 2$$

und bestimme die zugehörige Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + \dot{x} + 2x = 0$$

Bestimme die Nullstellen deines charakteristische Polynoms und bestimme, analog zum Vorgehen im reellen Fall, die Basislösungen deiner Differentialgleichung:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \cdots = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot i$$

$$\Rightarrow \underline{x_1(t) = e^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} i\right) \cdot t}}, \quad \underline{x_2(t) = e^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} i\right) \cdot t}}$$

Verifiziere die Gültigkeit deiner Lösungen:
(Verwende dazu, dass für die Ableitung im Komplexen gilt: $\frac{d}{dt}e^{rt} = re^{rt}, r \in \mathbb{C}$)

$$\underline{x_1(t) = e^{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i)t}} \Rightarrow \dot{x}_1(t) = \overset{\cdots}{(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{7}}{2}i)} \cdot e^{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i)\cdot t}$$

$$\dot{x}_2(t) = (-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{7}}{2}i)^2 \cdot e^{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i)\cdot t}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 + \dot{x}_1 + 2x = \left[(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{7}}{2}i)^2 + (-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{7}}{2}i) + 2\right] \cdot e^{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i)t}$$

$$= \left[\tfrac{1}{4} - \cancel{\tfrac{\sqrt{7}}{2}i} - \tfrac{7}{4} - \tfrac{1}{2} + \cancel{\tfrac{\sqrt{7}}{2}i} + 2\right] \cdot e^{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i)t}$$

$$= 0 \cdot e^{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i)t} = 0 \quad \square$$

(analog für $x_2(t) = e^{(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i)t}$)

und formuliere, wieder in Analogie zur Vorgehensweise im Reellen, die Fundamentallösung für deine Differentialgleichung

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = C_1 \cdot e^{(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot i)t} + C_2 \cdot e^{(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i)t}}}$$

Forme nun deine Fundamentallösung mit Hilfe der Potenzgesetze und der Euler'schen Formel auf folgende Form um:

$$x(t) = C_1 e^{at}(\cos bt + \imath \sin bt) + C_2 e^{at}(\cos bt - \imath \sin bt)$$

mit $\lambda_{1,2} = a \pm \imath b$ als die Nullstellen von $p(\lambda)$.

$$\underline{x(t)} = \ldots \overset{\text{Pot. G}}{=} C_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cdot e^{\frac{\sqrt{7}}{2}i \cdot t} + C_2 e^{-\frac{1}{2}\cdot t} \cdot e^{-\frac{\sqrt{7}}{2}i\,t}$$

$$\overset{\text{Euler}}{=} \underline{\underline{C_1 e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \left(\cos \tfrac{\sqrt{7}}{2}t + i \cdot \sin \tfrac{\sqrt{7}}{2}t\right)}}$$

$$+ \underline{\underline{C_2 e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos \tfrac{\sqrt{7}}{2}t - i \sin \tfrac{\sqrt{7}}{2}t\right)}}$$

Mit Hilfe der *Eigenschaften von Lösungen einer homogenen Differentialgleichung* kannst du nun

> aus der Summe deiner Basislösungen (in der *cis*-Darstellung) und einem geschickt gewählten Vielfachen eine *reelle* Basislösung in der Form $e^{at}\cos bt$ formulieren ...
>
> $$\tfrac{1}{2}\cdot(x_1(t)+x_2(t)) = \tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\tfrac{\sqrt{7}}{2}t + i\sin\tfrac{\sqrt{7}}{2}t\right) + e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\tfrac{\sqrt{7}}{2}t - i\sin\tfrac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)$$
> $$= \tfrac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cdot 2\cdot\cos\tfrac{\sqrt{7}}{2}t = \underline{e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\cos\tfrac{\sqrt{7}}{2}t}$$
>
> aus der Differenz deiner Basislösungen (ebenfalls in der *cis*-Darstellung) und einem geschickt gewählten Vielfachen eine weitere *reelle* Basislösung in der Form $e^{at}\sin bt$ formulieren ...
>
> $$\tfrac{1}{2i}\cdot(x_1(t)-x_2(t)) = \ldots = \tfrac{1}{2i}\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cdot 2i\cdot\sin\tfrac{\sqrt{7}}{2}t = \underline{e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\sin\tfrac{\sqrt{7}}{2}t}$$

und damit eine reellwertige Lösung deiner gewöhnlichen, linearen und homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, deren charakteristisches Polynom komplexe Wurzeln hat, formulieren:

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = \tilde{C}_1 e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\cos\tfrac{\sqrt{7}}{2}t + \tilde{C}_2\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\sin\tfrac{\sqrt{7}}{2}t}}$$

<u>Aufgaben:</u>

1. Zeige mit Hilfe der Euler'schen Formeln:

$$\cos x = \frac{e^{\imath x}+e^{-\imath x}}{2}\,, \qquad \sin x = \frac{e^{\imath x}-e^{-\imath x}}{2\imath}$$

2. Beweise weiter: $e^{\pi\imath/2} = \imath\,,\quad e^{\pi\imath} = -1\,,\quad e^{2\pi\imath} = 1$

3. Bestimme die reellwertigen Lösung für folgendes AWP:

$$16\ddot{x}(t) - 8\dot{x}(t) + 145x(t) = 0, \qquad x(0) = -2, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

   und stelle die Lösung graphisch dar.

4. Bestimme die allgemeine reelle Lösung von

$$\text{i)}\ \ \ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \quad \text{und} \quad \text{ii)}\ \ddot{x} + 9x = 0$$

   und vergleiche die graphischen Darstellungen mit der Lösung aus 3. Was fällt auf?

Analysis-Aufgaben: Differentialgleichungen 5

1. Euler'sche Formel: $r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

$$\Rightarrow r \cdot e^{-i\varphi} = r \cdot e^{i \cdot (-\varphi)}$$
$$= r \cdot (\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi)) = r \cdot (\cos\varphi - i \sin\varphi)$$

- $$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{(\cos x + i \cdot \sin x) + (\cos x - i \cdot \sin x)}{2} = \frac{2\cos x}{2} = \cos x$$ □

- $$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{(\cos x + i \sin x) - (\cos x - i \sin x)}{2i} = \frac{2i \sin x}{2i} = \sin x$$ □

2.

- $$e^{\pi i/2} = e^{i\pi/2} = \cos\pi/2 + i \cdot \sin\pi/2 = 0 + i \cdot 1 = i$$

- $$e^{\pi i} = \cos\pi + i \cdot \sin\pi = -1 + i \cdot 0 = -1$$

- $$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \cdot \sin 2\pi = 1 + i \cdot 0 = 1$$

3. $16\ddot{x}(t) - 8\dot{x}(t) + 145x(t) = 0, \quad x(0) = -2, \quad \dot{x}(0) = 1$

$$\Rightarrow p(\lambda) = 16\lambda^2 - 8\lambda + 145 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 145}}{2 \cdot 16} = \frac{8 \pm \sqrt{-9216}}{32} = 1/4 \pm 3i$$

$$\Rightarrow x(t) = C_1 e^{(1/4 + 3i)t} + C_2 e^{(1/4 - 3i)t} = \tilde{C}_1 e^{t/4} \cdot \cos 3t + \tilde{C}_2 e^{t/4} \sin 3t$$

$$x(0) = \tilde{C}_1 = -2$$

$$\dot{x}(t) = \tilde{C}_1 (1/4 \cdot e^{t/4} \cos 3t - 3e^{t/4} \cdot \sin 3t) + \tilde{C}_2 (1/4 \cdot e^{t/4} \cdot \sin 3t + 3 \cdot e^{t/4} \cdot \cos 3t)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(0) = \tilde{C}_1 \cdot 1/4 + \tilde{C}_2 \cdot 3 = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{C}_2 = 1/2$$

$$\Rightarrow x(t) = -2e^{t/4} \cdot \cos 3t + 1/2 \cdot e^{t/4} \cdot \sin 3t$$

4 i) $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ $\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2} \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow x(t) = C_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + C_2 e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t$

ii) $\ddot{x} + 9x = 0$ $\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3i$

$\Rightarrow x(t) = C_1 \cdot \cos 3t + C_2 \cdot \sin 3t$

Interpretation der graphischen Darstellungen von 3. & 4ii), 4iii)

alle Graphen stellen wegen der trigonometrischen Funktionen Schwingungen dar.

die exponentiell wachsen, für $\lambda_i > 0$

die exponentiell fallen, für $\lambda_i < 0$

die weder wächst noch fällt, sondern gleichmäßig schwingt, für $\lambda_i = 0$.

5. Ausgangslage: $a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + c\cdot x(t) \overset{(*)}{=} 0$

$p(\lambda) = 0$, mit $\lambda_{12} = \alpha \pm i\beta$

Beh.: $x(t) = \tilde{C}_1 \cdot e^{\alpha t}\cdot \cos\beta t + \tilde{C}_2 \cdot e^{\alpha t}\cdot \sin\beta t$ ist Lösg von $(*)$

Beweis: i) durch Verifizieren:

oBdA: setze $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = 1$ (Superpositionsprinzip der Basislösg)

- $\dot{x} = \alpha\cdot e^{\alpha t}\cdot\cos\beta t - \beta\cdot e^{\alpha t}\sin\beta t + \alpha\cdot e^{\alpha t}\sin\beta t + \beta e^{\alpha t}\cos\beta t$

$\ddot{x} = \alpha^2 e^{\alpha t}\cdot\cos\beta t - \alpha\beta\cdot e^{\alpha t}\sin\beta t - \alpha\beta e^{\alpha t}\sin\beta t - \beta^2 e^{\alpha t}\cos\beta t$

$+ \alpha^2 e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t + \alpha\beta\cdot e^{\alpha t}\cos\beta t + \alpha\beta e^{\alpha t}\cdot\cos\beta t - \beta^2 e^{\alpha t}\cdot\sin\beta t$

- $\Rightarrow a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = a\cdot\left[(\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2)\cos\beta t + (\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2)\sin\beta t\right]\cdot e^{\alpha t}$

$+ b\cdot\left[(\alpha+\beta)\cos\beta t + (\alpha-\beta)\sin\beta t\right] e^{\alpha t}$

$+ c\cdot\left[\cos\beta t + \sin\beta t\right]\cdot e^{\alpha t} \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \left(a\cdot(\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2) + b(\alpha+\beta) + c\right)\cdot\cos\beta t + \left(a\cdot(\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2) + b(\alpha-\beta) + c\right)\sin\beta t = 0$

$\Leftrightarrow a\cdot(\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2) + b\cdot(\alpha+\beta) + c \overset{(i)}{=} 0 \;\wedge\; a(\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2) + b(\alpha-\beta) + c \overset{(ii)}{=} 0$

$\alpha = \mathrm{Re}(\lambda) = -\frac{b}{2a}$, $\beta = \mathrm{Im}(\lambda) = \frac{\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a} = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

- $\overset{(i)}{\Rightarrow} a\cdot\left(\frac{b^2}{4a^2} + 2\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)\cdot\frac{\sqrt{-D}}{2a} - \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right) + b\cdot\left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{-D}}{2a}\right) + c \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{b^2}{4a} - \cancel{\frac{b\cdot\sqrt{-D}}{2a}} - \cancel{c} + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a}}_{2\cdot\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} = 0} + \cancel{\frac{b\cdot\sqrt{-D}}{2a}} + \cancel{c} = 0$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ ☺

- $\overset{(ii)}{\Rightarrow} a\cdot\left(\frac{b^2}{4a^2} - 2\cdot\left(\frac{-b}{2a}\right)\cdot\frac{\sqrt{-D}}{2a} - \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right) + b\cdot\left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{-D}}{2a}\right) + c \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{b^2}{4a} + \cancel{\frac{b\cdot\sqrt{-D}}{2a}} - \cancel{c} + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a}}_{=0} - \cancel{\frac{b\cdot\sqrt{D}}{2a}} + \cancel{c} = 0$ ☺

Beweis ü Konstruktiv / konstruktiv.

Diff. gl. 2. Ordnung hom., mit konst Koeff.
$p(\lambda) = 0 \iff \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ exp-Ansatz, $x(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

$$\Rightarrow x(t) = C_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$= C_1 \cdot e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} + C_2 e^{\alpha t} \cdot e^{-i\beta t}$$

$$= C_1 e^{\alpha t} \cdot (\cos\beta t + i \cdot \sin\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \cdot (\cos(-\beta t) + i \cdot \sin(-\beta t))$$

$$= \underline{C_1 e^{\alpha t} \cdot (\cos\beta t + i \cdot \sin\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \cdot (\cos\beta t - i \cdot \sin\beta t)}$$

eine Fundamentallösung mit den Basislösg. $x_1(t) = e^{\alpha t} \cdot (\cos\beta t + i \cdot \sin\beta t)$
$x_2(t) = e^{\alpha t} (\cos\beta t - i \cdot \sin\alpha t)$

$\Rightarrow$ Zwei neue Basislösg. / mithilfe Superpositionsprinzip)

$$\underline{\tilde{x}_1(t)} = \tfrac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2)$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot (e^{\alpha t} \cdot (\cos\beta t + i \cdot \sin\beta t) + e^{\alpha t} (\cos\beta t - i \cdot \sin\beta t)$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos\beta t$$

$$= \underline{e^{\alpha t} \cdot \cos\beta t}$$

$$\underline{\tilde{x}_2(t)} = \tfrac{1}{2i} \cdot (x_1 - x_2)$$

$$= \tfrac{1}{2i} \cdot (e^{\alpha t} \cdot (\cos\beta t + i \sin\beta t) - e^{\alpha t} (\cos\beta t - i \sin\beta t))$$

$$= \tfrac{1}{2i} \cdot 2i \cdot e^{\alpha t} \sin\beta t$$

$$= \underline{e^{\alpha t} \cdot \sin\beta t}$$

$\Rightarrow$ reellwertige Fundamentallösg: $\underline{\underline{\tilde{x}(t) = \tilde{C}_1 e^{\alpha t} \cdot \cos\beta t + \tilde{C}_2 e^{\alpha t} \cdot \sin\beta t}}$