① $\ddot{x}(t) - t\dot{x}(t) - x(t) = 0 \quad , \quad x(0) = 2 \quad , \quad \dot{x}(0) = 1$

a) Lösung von (*) mit Potenzreihenansatz um $t_0 = 0$:

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x(t) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n \\ \text{um } t_0 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n}$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$$

$$\ddot{x}(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot t^{n-2}$$

$$\xrightarrow[\text{ortn}]{\text{ein-}} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} - \underbrace{t \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n t^{n-1}}_{\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) \cdot a_{n+2} - a_n \right] \cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left[(0+2)(0+1) \cdot a_{0+2} - a_0 \right] \cdot t^0}_{\text{1. Summand, mit } n=0} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) \cdot a_{n+2} - a_n \right] \cdot t^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^n}_{(n+2)(n+1) \cdot a_{n+2} - a_n = n \cdot a_n}$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot a_2 - a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{a_{n+2}}} = \frac{(n+1) a_n}{(n+2)(n+1)} = \underline{\underline{\frac{a_n}{n+2}}}$$

(Rekursion für die Koeffizienten; da jeder Koeff. mit dem jeweiligen zweiten vorherigen Koeff. verglichen wird, unterscheiden zw. $a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots$ (gerade) von $a_1, a_3, a_5, a_7 \ldots$ (ungerade)

./.

/.

<u>n ungerade:</u>

a_1

$a_3 = \frac{a_1}{3}$

$a_5 = \frac{a_3}{5} = \frac{a_1}{3\cdot 5}$

$a_7 = \frac{a_5}{7} = \frac{a_1}{3\cdot 5\cdot 7}$

$\vdots$

<u>n gerade:</u>

$a_2 = \frac{a_0}{2}$

$a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2\cdot 4}$

$a_6 = \frac{a_4}{6} = \frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6}$

$a_8 = \frac{a_6}{8} = \frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$

$\vdots$

$$\begin{array}{lcccccccc} n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \Rightarrow \underline{\underline{x(t)}} = & a_0 & & + \frac{a_0}{2}\cdot t^2 & & + \frac{a_0}{2\cdot 4} t^4 & & + \frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6} t^6 & + \dots \\ & & + a_1 t & & + \frac{a_1}{3} t^3 & & + \frac{a_1}{3\cdot 5} t^5 & & + \frac{a_1}{3\cdot 5\cdot 7} t^7 + \dots \end{array}$$

$$= \underline{\underline{a_0 \left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2\cdot 4} + \frac{t^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{t^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \dots\right)}}$$

$$\underline{\underline{+ a_1 \cdot \left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{3\cdot 5} + \frac{t^7}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{t^8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \dots\right)}}$$

5) · $\underline{x(0) = 2}$: $\Leftrightarrow$ $\underline{a_0 = 2}$

· $\underline{\dot{x}(0) = 1}$: $\dot{x}(t) = a_0 \left(t + \frac{t^3}{2} + \frac{t^5}{2\cdot 4} + \frac{t^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \dots\right)$

$$+ a_1 \cdot \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{3} + \frac{t^6}{3\cdot 5} + \frac{t^8}{3\cdot 5\cdot 7} + \dots\right)$$

$\Rightarrow$ $\dot{x}(0) = 1$ $\Leftrightarrow$ $\underline{a_1 = 1}$

$\Rightarrow$ <u>Lösung AWP</u>: $\underline{\underline{x(t)}} = \underline{\underline{2\cdot\left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{48} + \dots\right)}}$

$$\underline{\underline{+ 1\cdot\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{15} + \frac{t^7}{105} + \dots\right)}}$$

(2) $\dot{x}(t) - 2x(t) = -t + 0{,}5 \quad , \quad x(0) = 1$

a) exakte Lösung: für $x_h(t)$: $\dot{x} - 2x = 0$,

$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_h(t) = C_1 \cdot e^{2t}}}$

für $x_p(t)$: (mit "geschicktem" Ansatz) $x_p(t) = A + Bt$

$\Rightarrow \dot{x}_p = B$

Einsetzen

$\Rightarrow \underline{B - 2\cdot(A + Bt) \overset{!}{=} -t + 0{,}5}$

$\Leftrightarrow B = 1/2 \wedge A = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{x_p(t) = 1/2 \cdot t}}$

$\Rightarrow \underline{x(t) = C_1 e^{2t} + 1/2 \cdot t}$

$x(0) = \underline{C_1 = 1} \quad \Rightarrow \underline{\underline{\text{DWP: } x(t) = e^{2t} + 1/2 \cdot t}}$

b) Lösung mit Euler:

für eine explizit dargestellte Diff.gl. 1. Ordnung: $\dot{x}(t) = f(x, t)$, $x(0) = x_0$

lautet die Euler'sche Näherungsformel: $x_{n+1} = x_n + h \cdot f(x_n, t_n)$,

mit h = konst. Schrittweite.

$\dot{x}(t) - 2x(t) = -t + 0{,}5 \Leftrightarrow \dot{x}(t) = \underbrace{2x(t) - t + 0{,}5}_{= f(x,t)}$

i) mit $h = 0{,}05$ $\Rightarrow t_0 = 0$, $t_1 = 0{,}05$, $t_2 = 0{,}1$, $t_3 = 0{,}15$, $t_4 = 0{,}2$, $t_5 = 0{,}25, \ldots$

- $x_0 = 1$
- $x_1 = x_0 + h \cdot f(x_0, t_0)$
  $= 1 + 0{,}05 \cdot (2 \cdot 1 - 0 + 0{,}5) = 1{,}125$
- $x_2 = x_1 + h \cdot f(x_1, t_1)$
  $= 1{,}125 + 0{,}05\ (2 \cdot 1{,}125 - 0{,}05 + 0{,}5) = \underline{\underline{1{,}26}}$ (= Lösg an der Stelle $t = 0{,}1$)
- $x_3 = 1{,}26 + 0{,}05\ (2 \cdot 1{,}26 - 0{,}1 + 0{,}5) = 1{,}406$
- $x_4 = 1{,}406 + 0{,}05\ (2 \cdot 1{,}406 - 0{,}15 + 0{,}5) = \underline{\underline{1{,}5641}}$ (= Lösg an der Stelle $t = 0{,}2$)

$\vdots$

- $\underline{\underline{x_6 = 1{,}92156}}$ (Lösg an der Stelle $t = 0{,}3$)
- $\underline{\underline{x_8 = 2{,}34359}}$ (Lösg an der Stelle $t = 0{,}4$)

ii) <u>mit $h = 0{,}025$</u>

analog für mit dieser Schrittweite:

an der Stelle $t = 0.1$: $1{,}26551$

$t = 0.2$: $1{,}57746$

$t = 0.3$: $1{,}94586$

$t = 0.4$: $2{,}38287$

Gruppe "Runge-Kutta-Verfahren"

③ a.) $\dot{x}(t) - 2x(t) \overset{*}{=} -1 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x} = 2x - 1$

$\rightarrow p(\lambda): \quad \lambda - 2 = 0$

$\lambda = 2$

$x_p(t) = C_1 \cdot e^{2t}$

$\rightarrow x_p(t) = C_1(t) \cdot e^{2t}$

$\dot{x}_p(t) = \dot{C}_1(t) \cdot e^{2t} + 2 \cdot C_1(t) \cdot e^{2t}$

in Diff'gleichung * einsetzen:

$\dot{C}_1(t) \cdot e^{2t} + 2 \cdot C_1(t) \cdot e^{2t} - 2 \cdot C_1(t) \cdot e^{2t} = -1$

$\dot{C}_1(t) = -e^{-2t}$

$C_1(t) = \frac{e^{-2t}}{2} + C_2$

Lösung der Diff'gleichung: $x(t) = \frac{e^{-2t}}{2} \cdot e^{2t} + e^{2t} \cdot C_2$

$x(t) = C_2 \cdot e^{2t} + \frac{1}{2}$

AWP: $x(0) = \frac{1}{2} + C_2 = 1$

$C_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \underline{\underline{x(t)}} = \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}(e^{2t} + 1)}}$

b.) $t_0 = 0$, $x_0 = 1$ ($\rightarrow$ siehe AWP)

somit gesucht: Lösung für $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$

i.) $x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4})$, $h = 0.1$

$\Rightarrow x_1 = x(0.1) = 1 + \frac{0.1}{6}(1 + 2 \cdot 1.1 + 2 \cdot 1.11 + 1.222) = 1.1107$

$k_{11} = f(0, 1) = 1$

$k_{12} = f(0.05, 1 + 0.05 \cdot 1) = 2 \cdot 1.05 - 1 = 1.1$

$k_{13} = f(0.05, 1 + 0.05 \cdot 1.1) = 2 \cdot 1.055 - 1 = 1.11$

$k_{14} = f(0.1, 1 + 0.1 \cdot 1.11) = 2 \cdot 1.111 - 1 = 1.222$

TR! $\begin{cases} x_2 = x(0.2) = 1.245909 \\ x_3 = x(0.3) = 1.4110532 \\ x_4 = x(0.4) = 1.6127604 \end{cases}$

ii.) $x_1 = x(0.05) = 1.0525854$; $x_4 = x(0.2) = 1.2459121$

$x_2 = x(0.1) = 1.1107013$; $x_5 = x(0.25) = 1.3243603$

$x_3 = x(0.15) = 1.1749292$; $x_6 = x(0.3) = 1.411059$