Analysis-Aufgaben: Diff.gleichungen 7

① Darstellung als harm. Schwingung : $x(t) = R\cdot\cos(\omega_0 t - \delta)$

Math. Ausgang: $R\cdot\cos(\omega_0 t - \delta) = R(\cos\omega_0 t\cdot\cos\delta + \sin\omega_0 t\cdot\sin\delta)$

$= R\cdot\cos\delta\cdot\cos\omega_0 t + R\cdot\sin\delta\cdot\sin\omega_0 t$

$= A\cdot\cos\omega_0 t + B\cdot\sin\omega_0 t$ mit $R\cdot\cos\delta = A$, $R\cdot\sin\delta = B$

$\Rightarrow \frac{B}{A} = \tan\delta$, $A^2 + B^2 = R^2$

a) $x(t) = 3\cdot\cos 2t + 4\cdot\sin 2t \Rightarrow R = \sqrt{25} = 5$

$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 0.927$

$= 5\cdot\cos(2t - 0{,}927)$

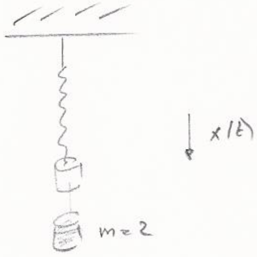
b) $x(t) = -2\cdot\cos\pi t - 3\cdot\sin\pi t \Rightarrow R = \sqrt{13}$

$\delta = \pi + \arctan\left(\frac{3}{2}\right) = 4{,}124$

$= \sqrt{13}\cdot\cos(\pi t - 4{,}124)$

② $m\ddot{x} = mg + F_1 - F_d + F \Rightarrow m\ddot{x} + \underset{\substack{\parallel\\0}}{\gamma}\dot{x} + kx = \underset{\substack{\parallel\\0}}{F(t)}$ (keine äusseren Kräfte)

(keine Dämpfung)



· $m = 2\,kg$

· $F_s = k\cdot L \iff k = \frac{F_s}{L} = \frac{2\,kg\cdot 9{,}81\,m/s^2}{0.049\,m} = 400.408\,N/m$

$\triangleq 400\,Nm^{-1}$

AWP: · $x(0) = -1/20\,m$

· $\dot{x}(0) = 1\,m/s$

$\Rightarrow 2\ddot{x} + 400x = 0, \quad x(0) = -1/20, \quad \dot{x}(0) = 1$

* (2) a) $\underline{2\ddot{x} + 400x = 0}$

$\Rightarrow \quad p(\lambda) = 2\lambda^2 + 400 \stackrel{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\lambda_{1,2}} = \pm\sqrt{-200} = \underline{\pm 10i\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \quad x_1 = C_1 \cdot e^{10i\sqrt{2}\cdot t}, \quad x_2 = C_2 \cdot e^{-10i\sqrt{2}\cdot t}$

$\Rightarrow \quad \underline{x(t) = C_1 e^{10i\sqrt{2}t} + C_2 e^{-10i\sqrt{2}t}}, \quad \omega_0 := 10\sqrt{2}$

Eigenschaften der Basislösungen ein Dgl.

$= C_1 \cdot (\cos\omega_0 t + i \cdot \sin\omega_0 t) + C_2 \cdot (\cos\omega_0 t - i \cdot \sin\omega_0 t)$

OEdA $C_1 = C_2 = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \cos\omega_0 t$

$\frac{1}{2i} \cdot (x_1 - x_2) = \sin\omega_0 t$

$\Rightarrow \quad \underline{x(t) = A \cdot \cos\omega_0 t + B \cdot \sin\omega_0 t}$

$\underline{AWP}$: $\cdot\ x(0) = A \cdot 1 + 0 \stackrel{!}{=} -1/30 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A = -1/30}$

$\cdot\ \dot{x}(0) = -A\omega_0 \cdot \sin\omega_0 t + B\omega_0 \cdot \cos\omega_0 t \,\Big|_{t=0}$

$= B \cdot \omega_0 \stackrel{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{B = 1/\omega_0}$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x(t) = -1/30 \cdot \cos(10\sqrt{2}\cdot t) + \frac{1}{10\sqrt{2}} \cdot \sin(10\sqrt{2}\, t)}}$

b) $\underline{\text{Frequenz} = 10\sqrt{2}}$

$\underline{\underline{\text{Amplitude}}} = \sqrt{(1/30)^2 + (1/10\sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{2+5}{1800}} = \underline{\underline{\sqrt{11/1800}}}$

$\underline{\underline{\text{Phase}}} = \pi - \arctan\left(\frac{1/10\sqrt{2}}{1/30}\right) = \underline{\underline{2.011}}$

(3) $\cdot\ mg = 78.4\,N \Rightarrow \underline{m} = \frac{78.4\,N}{9.81\,m/s} = 7.992\,kg \doteq \underline{8\,kg}$

$\cdot\ F_s = kl \Rightarrow \underline{k} = \frac{F_s}{l} = \frac{78.4\,N}{0.1\,m} = \underline{784\,Nm^{-1}}$

$\cdot\ \underline{\gamma = 30\,Ns/m}$

$\cdot$ <u>kein äußere Kraft</u>

$$\Rightarrow \underline{8\ddot{x}(t) + 30\dot{x}(t) + 784x(t) = 0}, \quad \text{mit } x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1/8$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = 8\lambda^2 + 30\lambda + 784 \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-30 \pm \sqrt{-24'188}}{16} = -15/8 \pm \sqrt{6047}\,i, \quad \omega := \sqrt{6047}$$

$$\Rightarrow \underline{x(t)} = C_1 \cdot e^{(-15/8 + \omega i)t} + C_2 \cdot e^{(-15/8 - \omega i)t}$$

$$= e^{-15/8 \cdot t} \cdot (C_1 e^{\omega i t} + C_2 e^{-\omega i t})$$

$$= \underline{e^{-15/8 t} \cdot (A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t)}, \quad \omega = \sqrt{6047}$$

<u>AWP</u>: $\cdot\ x(0) = 1 \cdot (A \cdot 1 + B \cdot 0) = 0 \Leftrightarrow \underline{A = 0}$

$$\cdot\ \dot{x}(0) = -15/8\, e^{-15/8 \cdot t} \cdot (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + e^{-15/8 \cdot t} \cdot (-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t) \Big|_{t=0}$$

$$= 1 \cdot (0 \cdot 1 + B \cdot 0) + 1 \cdot (-0 \cdot 0 + B\omega \cdot 1) = 1/8$$

$$\Leftrightarrow \underline{B = \frac{1}{8\omega}}$$

a) $$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = e^{-15/8 \cdot t} \cdot \frac{1}{8 \cdot \sqrt{6047}} \cdot \sin(\sqrt{6047} \cdot t)}}$$

b) $\underline{x(\tau) = 0,\ \tau \neq 0}$ $$\Leftrightarrow e^{-15/8\, \tau} \cdot \frac{1}{8 \cdot \sqrt{6047}} \cdot \sin(\sqrt{6047}\, \tau) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(\sqrt{6047}\, \tau) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tau = \frac{\pi}{\sqrt{6047}}}}$$

(4) Beh. $A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t = r \cdot \sin(\omega t - \varphi)$

Beweis: $r \cdot \sin(\omega t - \varphi) = r \cdot (\sin \omega t \cdot \cos \varphi - \cos \omega t \cdot \sin \varphi)$

$= r \cdot \cos\varphi \cdot \sin \omega t - r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \omega t$

$= B \sin \omega t + A \cdot \cos \omega t$

mit $B = r \cos \varphi$

$-A = r \cdot \sin \varphi$

$\Rightarrow \cdot\ r = r(A, B) = \sqrt{A^2 + B^2}$

$\cdot\ \frac{-A}{B} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi \Rightarrow \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-A}{B}\right)$

3) $A \cdot \cos(\omega t - \delta) = r \cdot \sin(\omega t - \varphi)$

$\Leftrightarrow A = r \ \wedge\ \delta = \varphi + (4n+1) \cdot \pi/2, \quad n \in \mathbb{Z}.$