Analysis-Aufgaben: Potenz- & Exponentialfunktionen 4

① $K(t) = 20'000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^t = 20'000 \cdot 1.02^t$

a) $K(5) = 22'081,60 \quad (22'081,616)$

b) $K(t) = 2 \cdot 20'000 \iff 20'000 \cdot 1.02^t = 2 \cdot 20'000$

$\iff 1.02^t = 2$

$\iff t = \log_{1.02} 2 = 35.003$ Jahr

c) 1.02

② $K_1(t) = 15'000 \cdot 1{,}0375^t$

$K_2(t) = 25'000 \cdot 1.0325^t$

für K_3 gilt: $K_3(25) = 2 \cdot 20'000 \iff 20'000 \cdot b^{25} = 2 \cdot 20'000$

$\iff b^{25} = 2$

$\iff b = 2^{1/25} \; (\approx 1.028113 \ldots)$

$\Rightarrow K_3(t) = 20'000 \cdot 2^{t/25}$

a) $K_1(t) = K_2(t) \iff 15'000 \cdot 1.0375^t = 25'000 \cdot 1.0325^t$

$\iff \left(\frac{1.0375}{1.0325}\right)^t = \frac{25}{15} = \frac{5}{3} \iff \ldots \iff t = 105.741$ Jahre

$\Rightarrow$ Im Jahr 2105

b) $K_2(t) = K_3(t) \iff \ldots \iff t = \log_{\frac{1.0325}{2^{1/25}}}\left(\frac{4}{5}\right) = -52,416 \Rightarrow$ nie

(sie hatten einen gemeinsamen Kontostand vor 52,416 Jahren

$\hat{=} 4,553$ Monat

$\Rightarrow$ August

c) $\underbrace{K_1(t) = K_2(t)}_{\text{a) } t = 105,74} = K_3(t)$ mit b) $t = -52,416$

$\neq \Rightarrow$ nie

d) $15'000 \cdot b^{20} = 25'000 \cdot 1.0325^{20}$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{b}} = \left(\frac{25}{15} \cdot 1.0325^{20}\right)^{1/20} = \underline{\underline{1.059}}$$

e) $K_1(t) + K_2(t) + K_3(t) = 100'000 \quad \overset{TR}{\Longleftrightarrow} \quad \underline{\underline{16,030 \text{ Jahre}}}$

f) mit $\underline{t = 0 \text{ im Jahr } 2000}$: $\quad \Rightarrow \quad K_3(t) = K_2(t-15)$

$$\Leftrightarrow \quad 20'000 \cdot 2^{t/25} = 25'000 \cdot 1.0325^{t-15}$$

$$= \frac{25'000 \cdot 1.0325^{t}}{1.0325^{15}}$$

$$\overset{TR}{\Longleftrightarrow} \ldots \quad \underline{60.275}$$

mit $\underline{t = 0 \text{ im Jahr } 2015}$; $\quad \Rightarrow \quad K_3(t+15) = K_2(t)$

$$\overset{TR}{\Longleftrightarrow} \ldots \quad \underline{t = 45.275}$$

$\underline{\text{Stand 1. Jan. 2015}}$ $\quad K_3(t) = \left(20'000 \cdot 2^{15/25}\right) \cdot 2^{t/25}$

$K_2(t) = 25'000 \cdot 1.0325^{t}$ $\quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{2^{1/25}}{1.0325}\right)^{t} = \frac{25'000}{20'000 \cdot 2^{15/25}} \quad \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \quad \underline{t = 45.275}$$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\text{Im Jahr } 2060}}$

3 a) $K(t) = a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{t} = a \cdot b^{t}$

$\Rightarrow \quad \cdot \; \underline{a = \text{Startkapital.}}$

$\cdot \; K(x) = a \cdot b^{x} = y \cdot a$

$\Leftrightarrow \quad \underline{b = y^{1/x}}$

$\Rightarrow \quad \underline{\underline{K(t) = a \cdot y^{t/x}}}$

b) $\underline{\underline{b = y^{1/x}}}$, c) $\underline{\underline{p = 100 \cdot \left(y^{1/x} - 1\right)}}$

d) aus a), b) & c) folgt für i) $\underline{\underline{b = 2^{1/10}}}$, $\underline{p} = 100 \cdot \left(2^{1/10} - 1\right) = \underline{\underline{7.177\,\%}}$

$\underline{\underline{\text{i)} = \text{ii)}}}$ (wegen exp. Wachstum)

④ Exp-Wachstum $\Rightarrow$ $f(t) = c \cdot b^t$

$$f(0) = \frac{1}{512} = c$$

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = 2 \cdot c \\ \quad \parallel \\ c \cdot b^3 \end{array}\right\} \Rightarrow b^3 = 2 \Leftrightarrow b = 2^{1/3}$$

$$\Rightarrow f(t) = 2^{-9} \cdot \left(2^{1/3}\right)^t$$

$$\Rightarrow f(t) = 1 \Leftrightarrow 2^{-9} \cdot \left(2^{1/3}\right)^t = 1$$

$$\Leftrightarrow 2^{t/3} = 2^9 \Leftrightarrow t = 27$$

⑤ Setze $t = 0$ um 8:00, ($t = [\text{Std}]$)

$f(t) = c \cdot b^t$, mit $f(0) = 2'300 = c$

$$\left.\begin{array}{l} f(4) = 36'800 \\ \quad \parallel \\ c \cdot b^4 \end{array}\right\} \Rightarrow b = \left(\frac{36'800}{2'300}\right)^{1/4} = 2$$

$$\Rightarrow f(t) = 2'300 \cdot 2^t$$

a) $f(1) = 4'600$

b) $f(2) = 9'200$

c) $f(3) = 18'400$

d) $f(5.5) = 104'086$ $(104'086.118)$

⑥ $f(t) = c \cdot b^t$

$$f(0) = 5'000 = c$$

$$\left.\begin{array}{l} f(20) = 3 \cdot c \\ \quad \parallel \\ c \cdot b^{20} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow b^{20} = 3 \\ \Leftrightarrow b = 3^{1/20} \end{array}$$

$$\Rightarrow f(t) = 5000 \cdot 3^{t/20}$$

a) $f(t) = 5000 \cdot 3^{t/20}$

b) $f(50) = \ldots = 77942$ $(77942{,}286)$

⑦ Beachte: $t=0$ für den Tag der Erhebung

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} f(10) &= a\cdot b^{10} = 1000 \\ f(110) &= a\cdot b^{110} = \frac{1000}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1000}{b^{10}} = \frac{1000}{3\cdot b^{110}}$$

$$\Rightarrow \ \ldots \ \underline{b = 3^{-1/100}}$$

$$\Rightarrow \ \underline{a} = 1000\cdot\left(3^{-1/100}\right)^{-10} = \underline{1000\cdot 3^{1/10}}$$

$$\Rightarrow \text{a)} \ \underline{f(t) = 1000\cdot 3^{1/10}\cdot 3^{-t/100}}$$

$$\text{b)} \ f(\underline{0}) = \ldots = \underline{\underline{1116}} \quad (1116{,}123)$$

⑧ $\underline{f(t) = a\cdot b^t}$

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= 0{,}86\cdot a \\ &\;\;\| \\ a\cdot b^1 & \end{aligned}\right\} \underline{b = 0{,}86}$$

$$\left.\begin{aligned} f(4) &= 54\,°C \\ &\;\;\| \\ a\cdot b^4 & \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{a} = 54\,°C\cdot b^{-4} = \underline{\underline{98{,}715\,°C}}$$

⑨ Wachstum $= 0.532\,\% \Rightarrow \underline{b = 1.00532} \quad \left(= 1 + \frac{p}{100}\right)$

$$\Rightarrow \underline{f(t) = 7.018.636\cdot 1.00532^t}$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Juli } 2028}: \quad f(120) = \ldots = \underline{\underline{7.804.354}} \quad / \ 7.804.353{,}723$$