Funktionen & *GeoGebra*

eine Einführung in Beides

durchgeführt während der
Arbeitswoche der W3a in Tenero, im April ’24

Gymnasiale Mittelstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

3. Mai 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Ein kurzer Überblick

1.1 Unsere Ziele sind

- das Kennenlernen des Begriffs **einer Funktion**, dabei insbesondere

  · ihn zu verstehen,

  · ihn anzuwenden   und somit auch

  · Informationen aus einem funktionalen Zusammenhang ziehen zu können.

  Selbstverständlich werden wir dabei auch grossen Wert auf einen exakten Umgang mit den *mathematischen Grundlagen, Definitionen* und insbesondere *Sprech- & Schreibweisen* legen. Was wir an rein mathematischen Anwendungen üben werden.

- das Kennenlernen erster Anwendungen der Freeware **GeoGebra** im Bereich der *Analysis*.
  Dabei werden Tools eingeführt und angewendet, die nützlich sind für

  · die Eingabe von Funktionen,

  · einfache Diskussionen/Interpretationen von Funktionen,

  · Bildschirmoptimierungen,

  · das Arbeiten mit dem Schieberegler,

  · das Arbeiten mit Polygonzug, Polynom, TrendExp2.

  Insbesondere soll auch eine hohe Sicherheit und Vertrautheit im Umgang mit *GeoGebra* erarbeitet werden.

1.2 Vorgehensweise

Wir werden uns mit Situationen aus der Physik, Wirtschaft und Biologie beschäftigen. Diese der Mathematik mit Hilfe von *Funktionen* zugänglich machen, durcharbeiten und insbesondere graphisch und mit *GeoGebra* interpretieren.
Wir werden die funktionalen Zusammenhänge, welche wir hier als Beispiele heranziehen, das sind insbesondere

- der freie Fall,
- das exponentielle und beschränkte Wachstum,
- die ZinsesZinsFormel (in der jährlichen Verzinsung),
- das Bevölkerungswachstum (die mathematische Modellierung),
- weitere Wachstums*modelle*.

nicht herleiten. Das folgt später in den jeweiligen Disziplinen. Wir verwenden sie ausschliesslich zur Veranschaulichung und als Übungsobjekte.

Begleitend zum gesamten Projekt empfehle ich begleitend die angehängten *Zusammenfassungen* zu führen:

Für ein selbständiges Einarbeiten in *GeoGebra, classic5* möchte ich noch auf folgendes Skript hinweisen:

ICT am Gymnasium

Einführung in GeoGebra

Funktionen

Grundlagen & erste Anwendungen

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

1.3 Ein kleiner Ausblick und ein kurzer Rückblick:

Mit dem Begriff der *Funktion* werden wir ein Hilfsmittel der Mathematik kennenlernen, welches von zentraler Bedeutung ist.
Mit Hilfe von Funktionen lassen sich Bewegungsabläufe oder Veränderungen beschreiben, Vorhersagen über das Bevölkerungswachstum machen, die Bahn eines Satelliten im Weltraum berechnen, ... und vieles mehr.
Mathematisch betrachtet ist eine Funktion nur eine *Vorschrift*, die einem Element aus der einen Menge genau ein Element in einer anderen Menge *zuordnet*.

In einem mathematischen Zusammenhang wurde der Begriff *Funktion* erstmals von Leibniz 1673 verwendet, in seiner Abhandlung *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus.* (dt.: Eine Methode, Tangenten umzukehren - oder: über Funktionen).
Der Begriff der Funktion hatte bei Leibniz jedoch noch nicht die heutige mathematische Bedeutung. Vielmehr wird er im Sinne von funktionieren einer Wirkungsweise eines Gliedes innerhalb eines Organismus bzw. einer Maschine verstanden.
Bei Leibniz findet sich auch erstmals die heute alltäglich verwendete Schreibweise $f(x) = y$.

Für weitere Informationen zur geschichtlichen Entwicklung des Begriffs der Funktion von den Babyloniern bis heute empfiehlt sich die Arbeit von Horst Hischer zur *Geschichte des Funktionsbegriffs*, Universität Saarland

http://www.math.uni-sb.de/service/preprints/preprint54.pdf

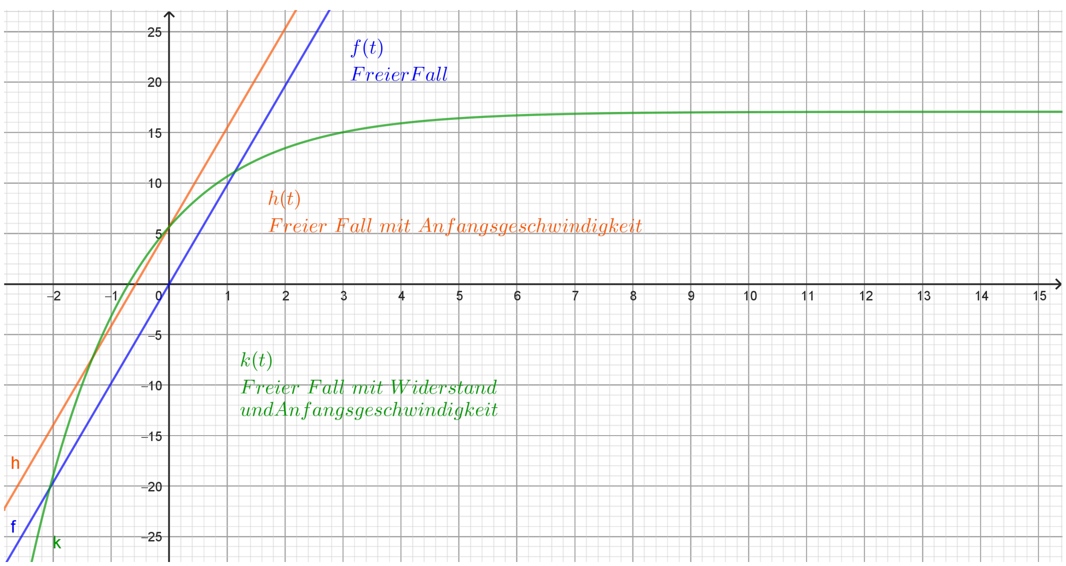
Die Eigenschaften und die Diskussion von Funktionen werden im weiteren Mathematikunterricht der gymnasialen Ausbildung eine sehr sehr wichtige und zentrale Rolle spielen.

2 Die Mathematik

An folgenden Beispielen werden wir uns mit die notwendigen Grundbegriffe und Definitionen bei Funktionen erarbeiten, welche wir zukünftig verwenden werden und ihr kennen *müsst*.

Wir schauen uns die graphische Darstellung des *Freien Falls* an:

- der Freie Fall, als vereinfachte Modellvorstellung
- der Freie Fall, mit Anfangsgeschwindigkeit
- der Freie Fall, mit Luftwiderstand (Stokes)

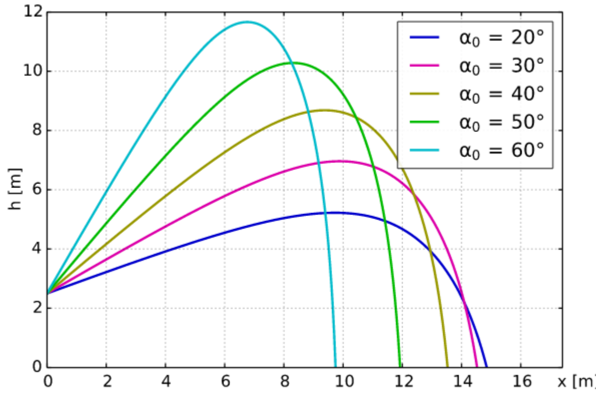


der Link zum zugehörigen *ggb*-file mit *Schieberegler*

Wir haben in jedem Fall

- jedem Zeitpunkt genau eine Geschwindigkeit zugeordnet:
  $t \overset{f,h,k}{\mapsto} v$
- dadurch vom Zeitpunkt abhängige Geschwindigkeiten bestimmt:
  $v = v(t)$

- Die Wurfparabel mit Luftwiderstand



- Bestimme die maximale Wurfhöhe, bei einem Startwinkel von 30^0.
- Bestimme die Würfhöhe nach einer Wurfweite von $8m$ und einem Startwinkel von 40^0.
- Von welcher Höhe aus sind alle Objekte geworfen worden?
- Bestimme die Wurfhöhe zum Startpunkt.
- Nach welchen Wurfweiten haben wir bei einem Startwinkel von 20^0 die Wurfhöhe von $8m$ erreicht?

wir können auch hier

- jeder Wurfweite genau eine Wurfhöhe zuordnen,
- dadurch eine von der Wurfweite abhängige Höhe bestimmen.

2.1 Unsere zentralen Begriffe

- **Zuordnung**

  jeder Zeit wird genau eine aktuelle Geschwindigkeit zugeordnet

  jeder Wurfweite wird genau eine Wurfhöhe zugeordnet

- **Abhängigkeit**

  die aktuelle Geschwindigkeit hängt von der Dauer des freien Falles ab

  die Wurfhöhe hängt von der Wurfweite ab

- **Koordinatensystem**

  zwei Achsen,
  die t-Achse, x-Achse für **die Argumente**, **die Stellen**, das **Wo** ,
  die y-Achse, für **die Werte** der Funktion, an den Stellen ...

  die Orientierungen beider Achsen

  die Einheiten auf beiden Achsen

  den Ursprung

Wir kennen nun die Eigenschaften einer Funktion und sind in der Lage, den Begriff der *Funktion* zu definieren:

Definition 2.1 (*Die Funktion*)

Eine **Funktion**, *eine* **Abbildung** $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *ist eine* Vorschrift, *die* jedem *Argument* genau einen *Funktionswert* zuordnet.

2.2 Schreib- & Sprechweise und die Verknüpfung von Funktionen

- $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$

  $\mathbb{A}$:= **Definitionsbereich von** $f =: \mathcal{D}(f)$
  ist die Menge aller zulässiger **Argumente** (der Funktion f)

  $\mathbb{B}$:= **Wertebereich von** $f =: \mathcal{W}(f)$
  ist die Menge aller zulässiger **(Funktions-) Werte**

- $x \overset{f}{\mapsto} x^2$ ist die sog. **Funktionsvorschrift**

- $f(x) = x^2$ ist die sog. **Funktionsgleichung**

Beispiel 2.1 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}\ ,\ x \overset{f}{\mapsto} \frac{1}{x^2}$

1. $\mathcal{D}(f) =$
2. $\mathcal{W}(f) =$
3. *die zugehörige Funktionsgleichung lautet:*
4. $f(3) =$
5. $f(\frac{1}{2}) =$

Beispiel 2.2 $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}\ ,\ t \overset{g}{\mapsto} 2t - 3$

1. $\mathcal{D}(g) =$
2. $\mathcal{W}(g) =$
3. *die zugehörige Funktionsgleichung lautet:*
4. $g(4) =$
5. $g(0) =$

Wir müssen noch eine weitere zentrale Grösse definieren

Definition 2.2 (*Die Variable*)

Die **Variable** *ist eine veränderliche Grösse, welche stellvertretend für alle Elemente des Definitionsbereichs steht.*

Beispiel 2.3 $a : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $a(r) = r^3 - r^2$, $b : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $b(r) = 2r$

1. $a(1) =$
2. $b(2) =$
3. $a(0) =$
4. $b(-1) =$
5. $a \circ b(2) =$
6. $a \circ b(1) =$
7. $b \circ a(2) =$
8. $b \circ b(0) =$
9. $a \circ b \circ a(-1) =$

Beispiel 2.4 $f(x) = x + 1, \quad g(x) = x^2$

1. $f(2) =$
2. $g(4) =$
3. $f(0) =$
4. $g(-1) =$
5. $f \circ g(4) =$
6. $f \circ f(2) =$
7. $g(a) =$
8. $f(k^2) =$
9. $f \circ g(x) =$
10. $g \circ f(x) =$

2.3 Aufgaben

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad x \overset{f}{\mapsto} 2x^2 - 12 \quad ; \qquad g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \overset{g}{\mapsto} 5x$
   Berechne die folgenden Funktionswerte:
   (a) $f(0) = \ldots$
   (b) $g(-2) = \ldots$
   (c) $f \circ f(5) = \ldots$
   (d) $g \circ g(2) = \ldots$

2. $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, \quad t \overset{x}{\mapsto} \frac{t}{t-5} \quad ; \qquad y : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad t \overset{y}{\mapsto} t^2 - 2t$
   Berechne die folgenden Funktionswerte:
   (a) $x(6) = \ldots$
   (b) $y(6) = \ldots$
   (c) $x \circ y(3) = \ldots$
   (d) $y \circ x(3) = \ldots$

3. Bestimme für die folgenden Funktionen den *kleinstmöglichen* Wertebereich:
   (a) $a : \mathbb{N} \to \ldots, \quad$ für $x \mapsto x^2$
   (b) $b : \mathbb{N} \to \ldots, \quad$ für $x \mapsto (-4x)^2$
   (c) $c : \mathbb{Z} \to \ldots, \quad$ für $x \mapsto x^2$
   (d) $d : \mathbb{N} \to \ldots, \quad$ für $x \mapsto \frac{1}{x}$

4. Bestimme für die folgenden Funktionen den *grösstmöglichen* Definitionsbereich:
   (a) $r : \ldots \to \mathbb{N}_0, \quad$ für $q \mapsto -q$
   (b) $s : \ldots \to \mathbb{Q}, \quad$ für $t \mapsto t^2$
   (c) $t : \ldots \to \mathbb{Z}, \quad$ für $v \mapsto -v^3$
   (d) $u : \ldots \to \mathbb{Z}_{<0}, \quad$ für $w \mapsto (-w)^3$

Für die gleichen und mehr Aufgaben:

Analysis-Aufgaben: *Funktionen (Grundlagen) 3*
(Zugehörige Lösungen)

3 Von der Wertetabelle zum Graphen das Bestimmen von Funktionsgleichungen

3.1 Fünf Minuten Repetition

- Definiere die folgenden Begriffe:
  - die **Funktion**:
  - die **Variable**:
  - der **Definitionsbereich**:
  - der **Wertebereich**:
- Bestimme die fehlenden Grössen:

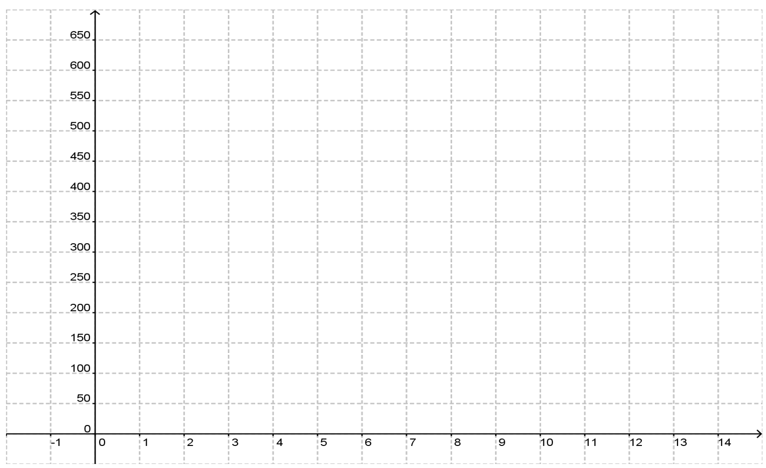
$$q(s) = s^2 - 2s \quad \text{und} \quad r(s) = -4s + 2s^2$$

  - $q(5) =$
  - $r(-5) =$
  - $r \circ r(3) =$
  - $q \circ q(-2) =$
  - $q \circ r(-2) =$
  - $r(3t) =$
  - $r \circ r(1) =$
  - $r \circ q \circ r(a) =$
  - $q(s) = 0, s =?$
  - $\{s \in \mathbb{Q} \mid q(s) = 0\}$

3.2 Von der Wertetabelle zum Graphen die Abhängigkeit und Zuordnung

Wir verwenden das Beispiel des *freien Falls* und beginnen mit der Darstellung des zurückgelegten Weges *in Abhängigkeit* von der aufgewendeten Zeit:

Aufgewendete Zeit [in s]	0	1	2	5	10
Zurückgelegter Weg [in m]	0	4.905	19.62	122.625	490.5



Wir haben somit .... Zeitpunkt t

.... Streckenlänge s zugeordnet:

....

Die Streckenlänge s ist also .... :

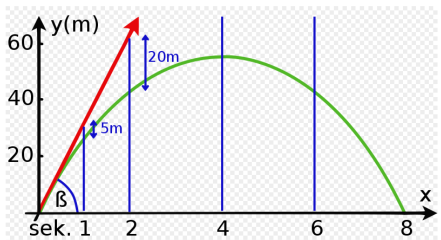
Die Entwicklung der Streckenlänge lässt sich *bildlich* darstellen:

Mit Hilfe dieser graphischen Darstellung lassen sich die folgenden Fragen (ungefähr) beantworten:

- 4 Sekunden nach dem Start sind ...... m zurückgelegt worden.
- Für die ersten 600 m freier Fall benötigen wir ...... s.

3.3 Funktionsgleichungen mit *GeoGebra* bestimmen

Am Beispiel der *Wurfparabel* wollen wir untersuchen, wie wir mit Hilfe von *GeoGebra* die Funktionsgleichung bestimmen können.



Beispiel 3.1 Bestimme die Funktionsgleichung einer Parabel, die durch die Punkte $A = (-2/3), B = (1/1)$ und $C = (5/6)$:

Beispiel 3.2 Wir betrachten einen Körper der aus einer Höhe von 2m geworfen wird, nach 6s in einer Höhe von 5m sein Maximum erreicht und nach 13s auf dem Boden landet.

1. Stelle die Situation mit *GeoGebra* dar.
2. Bestimme mit *GeoGebra*
   (a) die zugehörige Funktionsgleichung,
   (b) die Höhe nach 10s Flug,
   (c) die notwendige Zeit, um die maximale Höhe zu erreichen,
   (d) den Startwinkel.
3. Bestimme den Definitionsbereich aus mathematischer/physikalischer Sicht.

Definition 3.1 (*Der Graph einer Funktion*)

*Der **Graph** einer Funktion f ist definiert als die Menge $graph(f) := \{(x/y) \mid y = f(x)\}$.*

Definition 3.2 (*Die Parabel*)

*Eine Funktion der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$, mit $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ heisst eine **Parabel***

3.4 Weitere mathematische Grundbegriffe

Konstruiere die Graphen zweier Funktionen in einem Koordinatensystem:

$$f(x) = x^2 - 6.25 \quad \text{und} \quad g(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

Bestimme *anschaulich*

- die **Nullstellen** von f:
  die **Stellen**, wo die Funktion den Wert 0 hat
- den **Achsenabschnitt** von g:
  den **Wert**, in welche der Graph die y-Achse schneidet
- den Schnitt*punkt* von f mit der y-Achse:
- die Schnitt*punkte* von g mit der x-Achse:
- die Schnitt*stellen* von f und g:

Bestimme *mit GeoGebra*

- die **Nullstellen** von f:
- den **Achsenabschnitt** von g:
- den Schnitt*punkt* von f mit der y-Achse:
- die Schnitt*punkte* von g mit der x-Achse:
- die Schnitt*stellen* von f und g:

Bestimme *mathematisch*

- die **Nullstellen** von f:
- den **Achsenabschnitt** von g:
- den Schnitt*punkt* von f mit der y-Achse:
- die Schnitt*punkte* von g mit der x-Achse:
- die Schnitt*stellen* von f und g:

3.5 Aufgaben

Wir betrachten die folgenden Funktionen:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ mit } f(t) = (-t-3)(t-1)$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ mit } t \overset{g}{\mapsto} t^2(t-2)(t+2)$$

Bestimme ...

1. die Nullstellen von f und g.
2. die Schnittpunkte von f und g.
3. die Stelle, an welcher f ihren grössten Wert annimmt.
4. die Stelle, an welcher g ihren kleinsten Wert annimmt.
5. $\{t \in \mathbb{R} \mid g(t) < 0\}$
6. $\{t \in \mathbb{R} \mid f(t) = 3\}$
7. $\{t \in \mathbb{R} \mid f(t) = g(t)\}$
8. $\{t \in \mathbb{N} \mid f(t) = g(t)\}$
9. $\{t \in \mathbb{N}_0 \mid g(t) > f(t)\}$
10. $\{t \in \mathbb{Z} \mid g(t) < -\frac{1}{2}\}$
11. $\{t \in \mathbb{N} \mid g(t) > 0\}$
12. $\{t \in \mathbb{R} \mid f(t) > 4\}$
13. $\{y \in \mathbb{R} \mid f(t) = y \wedge t \in [-3, 0]\}$
14. $\{y \in \mathbb{R} \mid g(t) = y \wedge t \in [-1, 2[\}$

Zu den Lösungen der obigen und weiteren Aufgaben:

(oben zugehörige Lösungen)

Analysis-Aufgaben: *Funktionen (Grundlagen) 4b*
(Zugehörige Lösungen)

4 Funktionen und Biologie

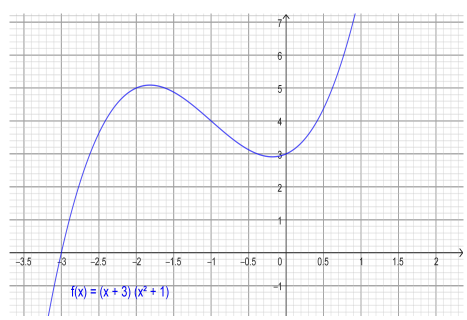
4.1 Fünf Minuten Repetition

Diskutiere mit deinem Banknachbarn/deiner Banknachbarin

- wo in einer Wertetabelle die *Vorschrift* einer Funktion steckt.
  Diese WT gehört zum folgenden Graphen. Vervollständige sie.

x	-2	-1			
	5		3		

- wo in einer graphischen Darstellung
  - · eine *Zuordnung* zu erkennen ist,
  - · eine *Abhängigkeit* zu erkennen ist,



  - · wo der *Definitionsbereich* und der *Wertebereich* liegen und warum,

- warum die *Argumente* auch sinnvollerweise die *Stellen* genannt werden.

4.2 Exponentielles Wachstum

Wir gehen von folgender Situation und Messungen aus:

> Wir züchten in einer Petrischale mit Nährboden Bakterien und wollen die Entwicklung deren Anzahl untersuchen.
> Wir beginnen unser Experiment um 08:00 mit 100 Bakterien und führen folgende weitere Messungen durch:

um 09:00	200 Bakterien
um 10:00	400 Bakterien
um 11:00	800 Bakterien

Wir erwarten nun

- um 13:00
- um 14:00
- um 13:30
- um 16:00

und wollen noch wissen, wann wir die 1 Million-Grenze überschreiten.

Wir können feststellen:

- Wir haben eine Vorschrift:
- Wir können jeder Zeit genau eine Anzahl Bakterien zuordnen:
  und somit eine Anzahl, die von der Zeit abhängig ist:
- Wir haben einen
  - · einen Definitionsbereich
  - · einen Wertebereich

aber leider noch keine Funktionsgleichung, um den Prozess beschreiben und diskutieren zu können.

Unsere Arbeit mit *GeoGebra* liefert uns:

$$f(t) = 100 \cdot 2^t$$

der Funktionstyp für *ein exponentielles Wachstum*, mit

- dem Startwert $= 100 = \mathrm{f(0)}$
- dem Wachstumsfaktor $= 2$, pro Stunde

und der Antwort auf die Frage, wann wir die 1 Million-Grenze überschreiten:

$f(t) = 10^6 \Rightarrow$ nach 13.288 Stunden, also um **21:17:15.764**

Aufgaben 4.1 *Bestimme die Funktionsgleichung für folgendes Wachstum:*

Eine Vervierfachung der Anzahl in 20 Minuten,
mit einem Startwert von 80

(Hinweis: Arbeite in Stunden)

Wir fassen zusammen:

Ein **exponentielles Wachstum** ist definiert durch die Eigenschaft, dass der Wert sich in den gleichen Zeitintervallen um den gleichen Faktor ändert.
Die zugehörige Funktionsgleichung, welche einen exponentiellen Wachstumsprozess beschreibt ist von der Form

$$f(t) = a \cdot b^t$$

mit a = Startwert und b = Wachstumsfaktor.
Wobei wir aufgrund unserer Erfahrung den Wachstumsfaktor bestimmen können:
Bei einer Ver$m$fachung in n Stunden und einem Startwert von a folgt für die zugehörige Funktionsgleichung:

$$f(t) = a \cdot m^{\frac{1}{n} \cdot t}$$

Beachte: $b = m^{\frac{1}{n}}, \neq (m^{\frac{1}{n}})^t = m^{\frac{1}{n} \cdot t} = m^{\frac{t}{n}}$

4.3 Aufgaben

Wir haben die folgende Situation:

> 2% der Oberfläche eines Teiches sind mit Algen bedeckt. Innerhalb von drei Tagen vervierfacht sich der Algenteppich.
>
> - Wir können als Funktionstyp zur Beschreibung diese Prozesses $f(t) = \ldots$ verwenden, weil $\ldots$
> - mit dem Startwert $\ldots$
> - und dem Wachstumsfaktor $\ldots$

1. Wie gross ist der algenbedeckte Anteil des Teichs nach zwei Tagen?
2. Wie gross ist der algenbedeckte Anteil des Teichs nach 5,5 Tagen?
3. Wie gross war der algenbedeckte Anteil des Teichs vor 6 Stunden ?
4. In wie vielen Tagen ist der Teich zur Hälfte mit Algen bedeckt?
5. In wie vielen Tagen sind 50% des Teichs algenfrei?
6. In wie vielen Tagen ist der ganze Teich algenbedeckt?
7. Vor wie vielen Tagen war nur 1% des Teichs mit Algen bedeckt?
8. Vor wie vielen Tagen war keine Alge auf dem Teich?

9.* Bestimme den Wachstumsfaktor so, dass der Teich bei gleichen Anfangsbedingungen nach fünf Tagen vollständig mit Algen bedeckt ist.

Für weitere Aufgaben

Analysis-Aufgaben: *Potenz- & Exponentialfunktionen 4*
(Zugehörige Lösungen)

5 Funktionen und Wirtschaft

5.1 Fünf Minuten Repetition

- Erkläre die folgenden Begriffe:
  - · Exponentielles Wachstum
  - · die Bedeutung der Parameter im zugehörigen Funktionstyp
- Löse die folgende Aufgabe:

  Mein Kapital von Fr. 10'000.- vermehrt sich auf dem Bankkonto
  jährlich um den Faktor 1.02.
  Nach wie vielen Jahren bin ich Millionär?

- Wir besprechen noch die Aufgabe 9.* und das Arbeiten mit dem *Schiebe-regler*:

5.2 Die ZinsesZinsformel - *jährliche Verzinsung*

Wir leiten die Formel in einer nicht ganz realistischen Situation her:

Startkapital: $K_0 =$ Fr. 100.-
Jahreszins: $p = 15\%$

- nach 1 Jahr:

$$\begin{array}{ccccccc} 100 & + & \frac{15}{100}\cdot 100 & = & 115 & & \\ K_0 & + & \frac{p}{100}\cdot K_0 & = & (1+\frac{p}{100})\cdot K_0 & =: & K_1 \end{array}$$

- nach 2 Jahren:

$$\begin{array}{ccccccccc} 115 & + & \frac{15}{100}\cdot 115 & = & 132.25 & & & & \\ K_1 & + & \frac{p}{100}\cdot K_1 & = & (1+\frac{p}{100})\cdot K_1 & = & (1+\frac{p}{100})\cdot(1+\frac{p}{100})\cdot K_0 & =: & K_2 \end{array}$$

- nach 3 Jahren:

$$\begin{array}{ccccccccc} 132.25 & + & \frac{15}{100}\cdot 132.25 & = & 152.10 & & & & \\ K_2 & + & \frac{p}{100}\cdot K_2 & = & (1+\frac{p}{100})\cdot K_2 & = & (1+\frac{p}{100})^3\cdot K_0 & =: & K_3 \end{array}$$

- nach 4 Jahren: $\ldots$ 174.90

- nach 10 Jahren: $\ldots$ 404.55

$$K_9 + \frac{p}{100}\cdot K_9 = (1+\frac{p}{100})\cdot K_9 = (1+\frac{p}{100})^{10}\cdot K_0 =: K_{10}$$

$$\vdots$$

- nach n Jahren:

Was haben wir nun eigentlich bestimmt/ gefunden?

Wir haben eine Funktionsgleichung $K(t) = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^t$,

- die das Wachstum des Kapitals beschreibt,

- mit der Zuordnung ...

- und der daraus folgenden Abhängigkeit ...

- und exponentiell ist:

  d.h.: in gleichen Zeitintervallen ändert sich der Wert (hier das Kapital) um den gleichen Faktor (pro Jahr: $\cdot\,(1 + \frac{p}{100})$*)*

  · mit dem Startwert ...

  · und einem interessanten Wachstumsfaktor ...

- mit dem Definitionsbereich ...

  Wir werden den Definitionsbereich auf $\mathbb{R}$ erweitern und den dadurch enstandenen Fehler später diskutieren (Stichwort: *Stetige Verzinsung*)

5.3 Aufgaben

Wir gehen von einem Startkapital von $K_0 =$ Fr. 250'000.- und einem jährlichen Zinsatz von $p = 1.75\%$ aus.

Bestimme zuerst die zugehörige Funktionsgleichung:

Untersuche den mathematischen Hintergrund und löse mit *GeoGebra*:

1. Bestimme das Kapital nach
   (a) 5 Jahren,
   (b) 20 Jahren.

2. Nach wie vielen Jahren ist das Kapital auf 300'000.- Fr. angewachsen?

3. Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt?

4. Wie hoch müsste der jährliche Zinssatz sein, damit wir nach 10 Jahren Millionäre sind?

5. Wie gross müsste das Startkapital sein, damit wir mit dem ursprünglichen Jahreszins in 20 Jahren Millionäre sind?

Für weitere Aufgaben

Analysis-Aufgaben: *Potenz- & Exponentialfunktionen 4*
(Zugehörige Lösungen)

6 Funktionen und das Bevölkerungswachstum Mathematische Modellierung

6.1 Fünf Minuten Diskussion über das *Mathematische Modellieren*

Ziele einer Modellierung:

- *Teile* der Realität *mathematisch erfassbar* zu machen,
  Modelle haben einen begrenzten Gültigkeitsbereich
- Vereinfachungen,
- Prognosen,
- Skalierungen (in Raum und Zeit),

Beispiele:

- Landkarten,
- Wettermodelle,
- Wachstumsmodelle,

Probleme/Vorteile: am Beispiel des Freien Falls

$$f(t) = g \cdot t$$

$$h(t) = v_0 + g \cdot t$$

$$k(t) = \frac{m \cdot g}{b} \left(\frac{m \cdot g}{b} - v_0 \right) e^{-\frac{c}{m \cdot t}}$$

6.2 Beispiel eines empirischen Modells - Anpassung der Parameter

Für das Wachstum einer Bohne seien folgende Messwerte für die Zeit in Tagen seit der Pflanzung und die zu dieser Zeit gemessene Höhe der Bohne gegeben:

Zeit in Tagen	3	5	10	15	20	30	40	50	60	70	80	100
Höhe in cm	0,5	1	2	7	15	30	70	130	170	230	248	252

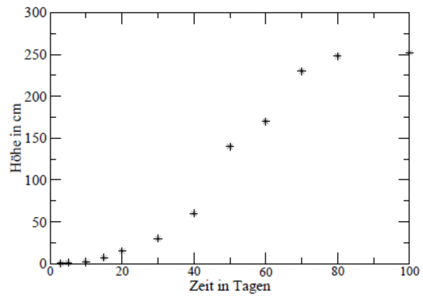


Abbildung 2.3: Wachstum einer Stangenbohne.

Unsere Analyse mit Möglichkeiten von *GeoGebra*:

6.3 Aufgaben

Für Asien haben wir die folgenden Bevölkerungszahlen: (in Mio. EW)

1800	**1900**	**1950**	**2000**
567	780	1400	3800

Wir *gehen davon aus*, dass das Wachstum *exponentiell* verläuft.

1. Bestimme das Bevölkerungswachstum in % pro Jahr von ...
   (a) 1800 bis 1900.
   (b) 1900 bis 1950.
   (c) 1950 bis 2000.
2. Bestimme den Wachstumsfaktor für die Periode 1900 bis 2000 und
   (a) ... bestimme die Bevölkerungszahl im 2003.
   (b) ... bestimme das Jahr, in welchem die Bevölkerung die 2 Millardengrenze überschritten hat.

Diskutiere die Probleme beim Modell des Exponentiellen Wachstums für die Bevölkerungsentwicklung:

... und abschliessend noch eine Aufgabenserie über fast alles

Analysis-Aufgaben: *Funktionen (Grundlagen 7)*
(wo alle zugehörigen Lösungen zu finden sind)

7 Weitere Wachstums***modelle***

7.1 Fünf Minuten Repetition & ein Brainstorming über ***Mathematisches Modellieren***

- *Lineares Wachstum*

- *Exponentielles Wachstum*

- *Probleme dieser Modelle, Lösungsvorschläge*

7.2 Beschränktes Wachstum

Bei einem **beschränkten Wachstum** handelt es sich um ein mathematisches Modell, dass *einen* Wachstumsprozess mit einer nach oben oder nach unten begrenzenden Schranke beschreibt.

Die zugehörigen Funktionstypen sind

- für ein *nach oben* beschränktes Wachstum:

$$b(t) = S_o - (S_o - b(0)) \cdot e^{-kt} = S_o - a \cdot e^{-kt}$$

- für ein *nach unten* beschränktes Wachstum:

$$b(t) = S_u + (b(0) - S_u) \cdot e^{-kt} = S_u + a \cdot e^{-kt}$$

mit folgenden Bezeichnungen der Parameter:

· t = Zeit
· $b(0)$ = Anfangsbestand
· $b(t)$ = Bestand zur Zeit t
· S_o = obere Schranke $> b(t), \ \forall t$
· S_u = untere Schranke $< b(t), \ \forall t$
· k = Wachstumskonstante $k \in \mathbb{R}_{>0}$

Untersuche mit *GeoGebra* den Einfluss der Parameter auf den Verlauf des Graphen und überlege dir Situationen, wo ein beschränktes Wachstum zur Anwendung kommen kann.

7.2.1 Aufgaben

Ein Verlag bringt in einer Stadt mit 4000 Haushalten eine neue Zeitschrift auf den Markt. Nach einer Woche sind 1436 Zeitschriften verkauft.
Der Verkauf sollt durch ein beschränktes Wachstum modelliert werden.

Bestimme die Funktionsgleichung, die den Verkauf beschreibt.

7.2.2 Aufgaben

Onkel Dagobert aus Entenhausen hat es satt, dass dauernd jemand versucht seinen Geldspeicher zu überfallen. Er hat vor, nur noch 100'000 Goldtaler im Speicher zu lagern und den Rest unterirdisch anderswo zu sichern.
Beim Start der Abtransporte befinden sich 120 Mio Taler im Geldspeicher, nach einer Stunde sind es 5% weniger.

Bestimme die Funktionsgleichung, die den Verlauf des Geldbestandes beschreibt und ermittle damit die notwendige Zeit,

- um die die Hälfte,
- 75%,
- 99% des Bestandes abzutransportieren.

und wie lange es dauert, bis die untere Grenze erreicht wird.
Zeige mit *GeoGebra*, dass die 100'000er Grenze nicht unterschritten werden kann.

7.3 Vergiftetes Wachstum

Das *vergiftete Wachstum* ist ein *Modell*, das einen weiteren Wachstumsprozess beschreibt. Ein Modell, das wiederum die Entwicklung des Bestandes beschreibt, bei dessem Prozess aber die Vergrösserung des Bestandes (Vermehrung) durch einen Hemmstoff (Inhibitor) gebremst wird. Das zu einem Aussterben der Population führen kann. Im Gegensatz zum exponentiellen Wachstum ist der Wachstumsfaktor mit konstant, sondern selber zeitabhängig.
Bei einem sogenannten *fremdvergiftetem Wachstum* sieht die Wachstumsfunktion wie folgt aus:

$$b(t) = b(0) \cdot e^{k \cdot t - \frac{1}{2} c \cdot t^2} = b(0) \cdot \left(e^{k \cdot t} : e^{\frac{1}{2} c \cdot t^2} \right)$$

mit folgenden Bezeichnungen der Parameter:

- t = Zeit
- $b(0)$ = Anfangsbestand
- $b(t)$ = Bestand zur Zeit t
- k = artspezifische Wachstumskonstante der Population (z.B. Geburtenrate)
- c = Vergiftungskonstante, die toxische Wirkung des Inhibitors (z.B. Sterberate)
- e = Euler'sche Zahl

Untersuche mit *GeoGebra* den Einfluss der Parameter auf den Verlauf des Graphen und überlege dir Situationen, wo ein beschränktes Wachstum zur Anwendung kommen kann.
Recherchiere den Begriff *selbstvergiftetes Wachstum.*

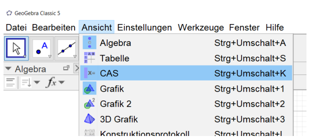
7.3.1 Aufgaben

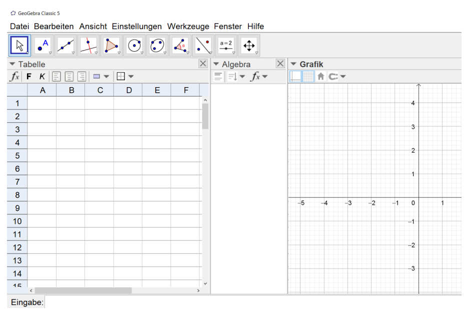
7.4 Approximation einer Kostenfunktion

Zum Abschluss noch ein Beispiel zur selbständigen Erarbeitung:

- Zum Thema *Approximation einer Kostenfunktion*

- Neue *GeoGebra* - Tools:
  Tabellen und Übertragung in ein Koordinatensystem





- Zum zentralen Video mit den Erläuterungen zum Thema:

  auf youtube ...

- Eine ausfürliche Einführung in das Arbeiten mit *Tabellen & GeoGbra*
  (für den individuellen Bedarf)

Viel Spass

8 *Meine* Zusammenfassungen

8.1 zur *Mathematik*

8.2 zu *GeoGebra*