Funktionen (Grundlagen)

ANALYSIS Kapitel 1

NProfil - Gymnasiale Mittelstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

19. September 2022

zum **aktuellen Skript**

Die *QR* - Codes
zu den *Funktionen (Grundlagen)*
NProfil

zur Homepage

zur Übersicht *Analysis*

zu den Funktionen (Grundlagen)

zu den Aufgaben & Lösungen

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen *(Grundlagen)*

1.1 Einleitung

Mit dem Begriff der *Funktion* werden wir ein Hilfsmittel der Mathematik kennenlernen, welches von zentraler Bedeutung ist.
Mit Hilfe von Funktionen lassen sich Bewegungsabläufe oder Veränderungen beschreiben, Vorhersagen über das Bevölkerungswachstum machen, die Bahn eines Satelliten im Weltraum berechnen, ... und vieles mehr.
Mathematisch betrachtet ist eine Funktion nur eine *Vorschrift*, die einem Element aus der einen Menge genau ein Element in einer anderen Menge *zuordnet*.

In einem mathematischen Zusammenhang wurde der Begriff *Funktion* erstmals von Leibniz 1673 verwendet, in seiner Abhandlung *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus.* (dt.: Eine Methode, Tangenten umzukehren - oder: über Funktionen).
Der Begriff der Funktion hatte bei Leibniz jedoch noch nicht die heutige mathematische Bedeutung. Vielmehr wird er im Sinne von funktionieren einer Wirkungsweise eines Gliedes innerhalb eines Organismus bzw. einer Maschine verstanden.
Bei Leibniz findet sich auch erstmals die heute alltäglich verwendete Schreibweise $f(x) = y$.

Für weitere Informationen zur geschichtlichen Entwicklung des Begriffs der Funktion von den Babyloniern bis heute empfiehlt sich die Arbeit von Horst Hischer zur *Geschichte des Funktionsbegriffs*, Universität Saarland

http://www.math.uni-sb.de/service/preprints/preprint54.pdf

Die Eigenschaften und die Diskussion von Funktionen werden im weiteren Mathematikunterricht der gymnasialen Ausbildung eine sehr sehr wichtige Rolle spielen.

1.2 Zuordnung & Abhängigkeit am Beispiel des *freien Falls*

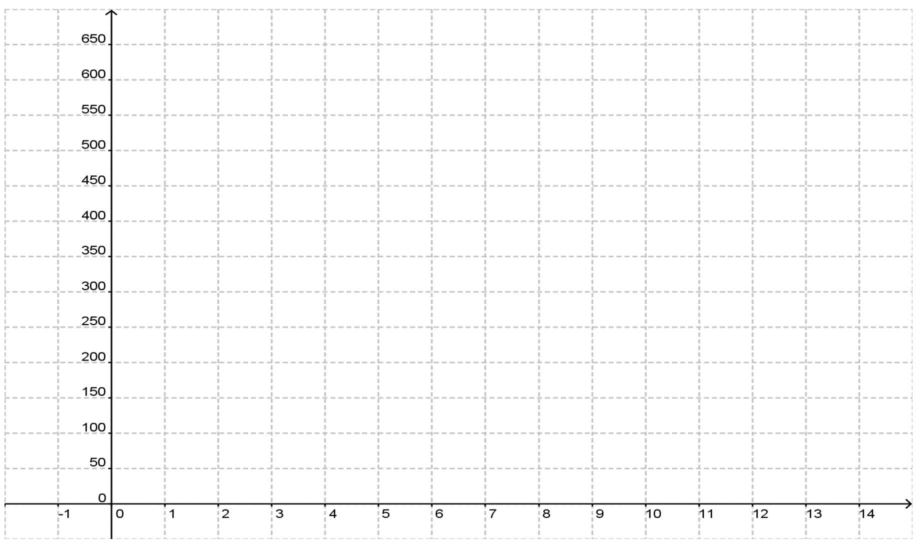
Einen ersten Zugang zum Begriff der Funktion wollen wir uns mit dem Beispiel des (idealen) freien Falls verschaffen und gehen dazu von den folgenden (messbaren) Werten aus:

Aufgewendete Zeit [in s]	0	1	2	5	10
Momentane Geschwindigkeit [in m/s]	0	9.81	19.62	49.05	98.1
Zurückgelegter Weg [in m]	0	4.905	19.62	122.625	490.5

Wir wollen die Informationen und Zusammenhänge aus der Tabelle graphisch darstellen in dem wir die obigen Werte in ein Koordinatensystem übertragen.
Beginnen werden wir deshalb mit einer kurzen Wiederholung der Grundbegriffe im Zusammenhang mit kartesischen Koordinatensystemen:

Wir beginnen mit der Darstellung des zurückgelegten Weges *in Abhängigkeit* von der aufgewendeten Zeit:

Aufgewendete Zeit [in s]	0	1	2	5	10
Zurückgelegter Weg [in m]	0	4.905	19.62	122.625	490.5



Wir haben somit .... Zeitpunkt t

.... Streckenlänge s zugeordnet:

....

Die Streckenlänge s ist also .... :

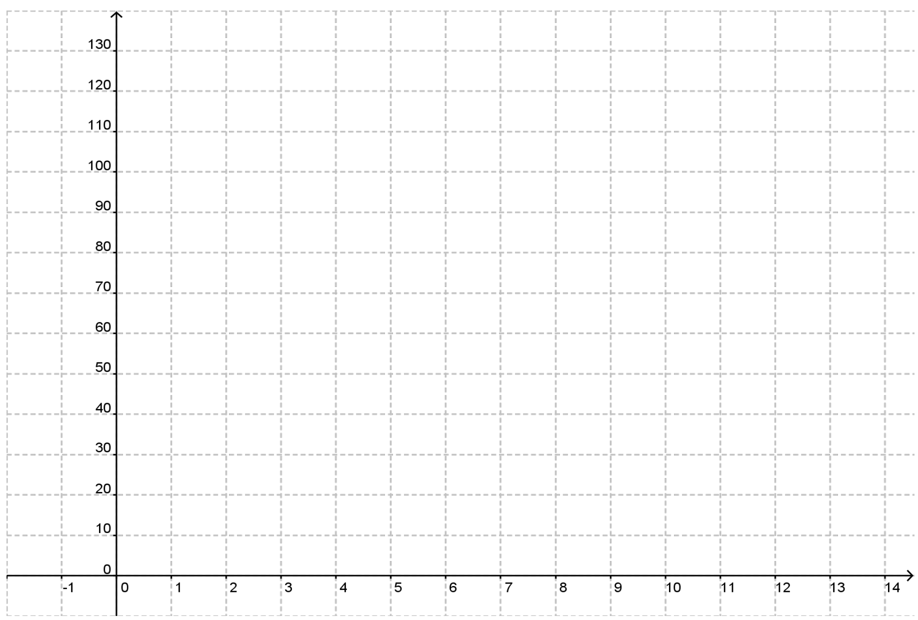
Die Entwicklung der Streckenlänge lässt sich *bildlich* darstellen:

Mit Hilfe dieser graphischen Darstellung lassen sich die folgenden Fragen (ungefähr) beantworten:

- 4 Sekunden nach dem Start sind ...... m zurückgelegt worden.
- Für die ersten 600 m freier Fall benötigen wir ...... s.

Wir wollen nun die momentane Geschwindigkeit *in Abhängigkeit* von der aufgewendeten Zeit graphisch darstellen:

Aufgewendete Zeit [in s]	0	1	2	5	10
Momentane Geschwindigkeit [in m/s]	0	9.81	19.62	49.05	98.1

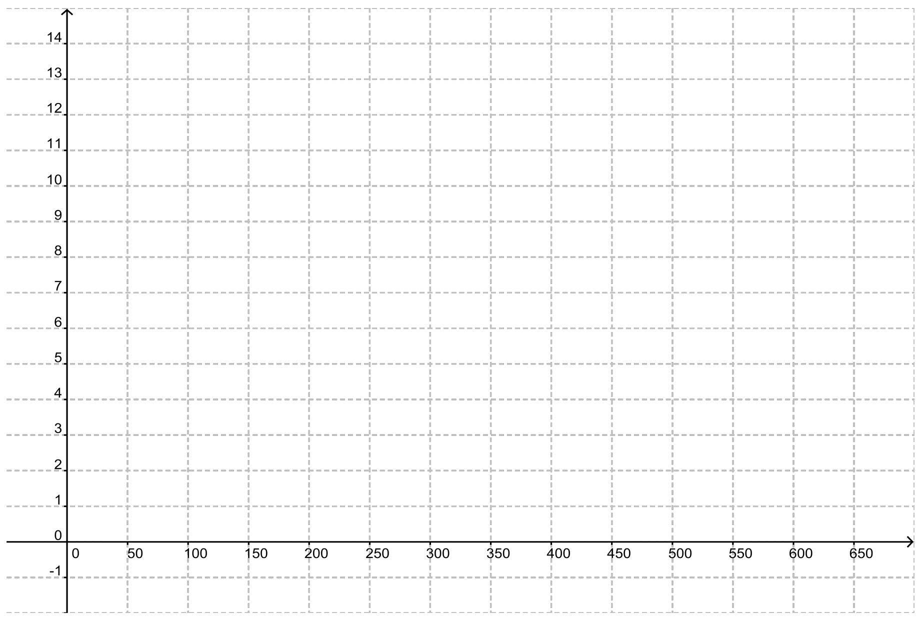


und beantworte die folgenden Fragen:

- Wie gross ist die momentane Geschwindigkeit nach $7.5s$ freiem Fall ?
- Wann wird eine Geschwindigkeit von $30m/s$ erreicht ?
- Wann wird eine Geschwindigkeit von $100km/h$ erreicht und wie viele Meter freier Fall müssen dafür zurückgelegt werden ?

Aufgaben 1.1 *Stelle $t(s)$ graphisch dar:*

Aufgewendete Zeit [in s]	0	1	2	5	10
Zurückgelegter Weg [in m]	0	4.905	19.62	122.625	490.5



und beantworte die folgenden Fragen:

- *Wieviel Zeit wird für eine Strecke von* $250m$ *gebraucht ?*
- *Wie viele Meter freier Fall werden in* $9s$ *zurückgelegt ?*
- *Formuliere weitere Fragen, die mit der obigen graphischen Darstellung beantwortet werden können:*
  -
  -
  -

Wichtig für die graphische Darstellung von funktionalen Zusammenhängen sind die folgenden Begriffe und Schreibweisen, die du jetzt noch in eigenen Worten erklären sollst:

- **Koordinatensystem**

- **Abhängigkeit**

- **Zuordnung**

- $\mathbf{s = s(t)}$

Wir kennen die Eigenschaften einer Funktion und sind nun in der Lage, den Begriff der *Funktion* zu definieren:

Def.:	Eine **Funktion** ist eine *Vorschrift*, die *jedem* Argument *genau einen* Funktionswert *zugeordnet*.

d.h.: wir haben jeweils ...

- *jeder* aufgewendeten Zeit, *genau eine* zurückgelegte Wegstrecke *zugeordnet*,

$$t \mapsto s \ , \ s = s(t)$$

- .... aufgewendeten Zeit, ... momentane Geschwindigkeit *zugeordnet*,

$$t \mapsto \ldots \ , \ \ldots \ = \ \ldots$$

- *jeder* .... , *genau eine* .... *zugeordnet*,

$$s \mapsto t \ , \ t = t(s)$$

- und mit $s(v)$ wird ...

Analysis-Aufgaben: *Funktionen (Grundlagen) 1*
(Zugehörige Lösungen)

1.3 Weitere Beispiele

Bevor wir uns (mathematisch) vertieft mit dem Begriff der Funktion auseinandersetzen werden, noch einige weitere Beispiele, um uns graphisch mit den Zuordnungen und möglichen Interpretationen von Funktionen zu befassen.

Die folgenden Beispiele sollt ihr selbständig in **Gruppen** lösen:

- *Struktur:* $2 \times$ 3-4 SchülerInnen für den *Bremsweg*
  $2 \times$ 3-4 SchülerInnen für die *Flatrat*
  $2 \times$ 3-4 SchülerInnen für die *F1*
- *Hauptaufgabe:*
  Präsentation & Diskussion der Lösungen in *neuen* Gruppen,
  Abgabe der eingescanten Lösung als pdf.
- *Nachbearbeitung:* Fragen an die Hauptgruppen im Plenum.

Zeitrahmen:

- Für die Vorbereitung in der *Expertengruppe*:
  eine 1/2 Lektion & HA.
- Für die Präsentation & Diskussion:
  Pro Thema max 10 Minuten.
- Für die Nachbesprechung:
  nach Bedarf.

Gruppenzusammensetzungen :

1.3.1 Totaler Bremsweg

Der *Totale Bremsweg* s für ein Fahrzeug setzt sich zusammen aus

- dem *Bremsweg* s_b,
  der nötig ist um das Fahrzeug zum Stillstand zu bringen

  und

- dem *Reaktionsweg* s_r,
  der zurückgelegt wird, bis die Bremsung überhaupt erst eingeleitet wird.

Es gilt somit: $s = s_b + s_r$

Das Messen bei Versuchen liefert uns die folgenden Werte:

Geschwindigkeit v [in km/h]	0	20	40	60	80	100	120	140
Bremsweg s_b [in m]	0	4	16	36	64	100	144	196
Reaktionsweg s_r [in m]	0	6	12	18	24	30	36	42
Totaler Bremsweg s [in m]	...	...	...	...	...	...	...	...

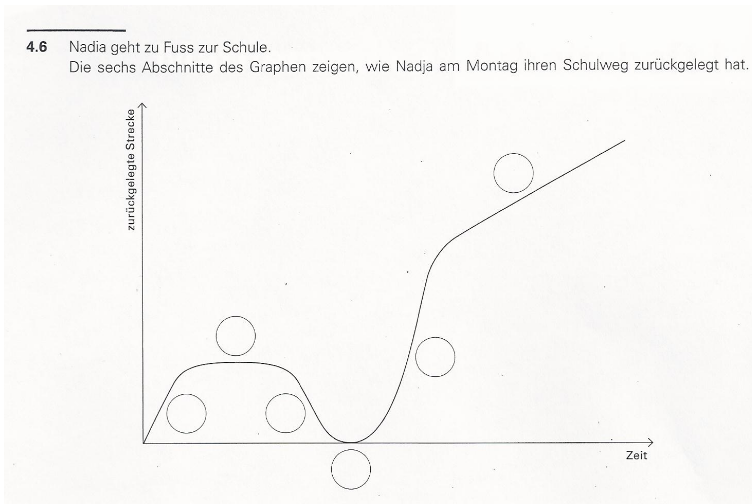
Aufgaben 1.2 *Stelle $s_b(v), s_r(v)$ und $s(v)$ graphisch dar:*

und beantworte die folgenden Fragen:

1. *Wie lang ist der Totale Bremsweg bei 50km/h ?*
2. *Wie schnell ist das Fahrzeug unterwegs, wenn der Bremsweg 75m beträgt ?*
3. *Wie lang sind Brems- und Reaktionsweg, wenn der Totale Bremsweg 150m beträgt ?*
4. *Das Fahrzeug ist mit 170km/h unterwegs. Bestimme den Brems- & Reaktionsweg.*
5. *Das Fahrzeug ist mit 100km/h unterwegs.*
   Wie weit muss die Geschwindigkeit reduziert werden, damit
   (a) *der Reaktionsweg sich halbiert ?*
   (b) *der Bremsweg sich halbiert ?*
   (c) *der totale Bremsweg sich halbiert ?*
6. *Wenn das Fahrzeug statt mit 30km/h mit 60km/h unterwegs ist, um wie viele % verlängert sich der Totale Bremsweg ?*
7. *Wenn das Fahrzeug statt mit 60km/h mit 120km/h unterwegs ist, um wie viele % verlängert sich der Totale Bremsweg ?*
8. *Wenn das Fahrzeug statt mit 45km/h mit 90km/h unterwegs ist, um wie viele m verlängert sich der Bremsweg ?*

1.3.2 Schulweg

Als ein weiteres Beispiel verwenden wir eine Aufgabe aus dem neuen Lehrmittel Mathematik 2 der Sekundarstufe 1:



Trage in der Graphik die Nummern beim entsprechendem Abschnitt ein:

1. Was wird in Abhängigkeit von was dargestellt?
2. Nadia hat ihre Turnsachen vergessen und kehrt nach Hause zurück.
3. Sie beeilt sich, um Karin einzuholen.
4. Nadia nimmt den Sack mit den Turnsachen von der Garderobe bei der Haustüre und macht sich sofort wieder auf den Weg zur Schule.
5. An der Strassenkreuzung wartet sie wie immer auf Karin.
6. Endlich kann Nadia Karin auf der gemeinsam zurückgelegten Wegstrecke erzählen, was sie über das Wochenende alles erlebt hat.
7. Eine kurze Wegstrecke rennt Nadia.

Wählt ein Mitglied eurer Gruppe aus und erstellt einen graphische Darstellung ihres/seines übliche Schulweges. Stellt die aufgewendete Zeit in Abängigkeit von der zurückgelegten Strecke dar. Achtet insbesondere auf die Änderungen im Verlauf der graphischen Darstellung, bedingt durch die Art der Fortbewegung: zu Fuss, mit dem Fahrrad oder Bus, Flugzeug, Zug, im Stau stehend, ... , beamen, etc.

Erstellt eine Liste aller verwendetet Arten der Fortbewegung (*nicht* in chronologischem Ablauf, die Arten der Fortbewegung können sich auch wiederholen.)

Eine Gruppe muss ihre graphische Darstellung präsentieren und die Klasse muss den einzelnen Abschnitten die Art der Fortbewegung zuordnen.

1.3.3 Flatrate

Stelle die folgenden Surftarife eines Telefonanbieters *in Abhängigkeit der Zeit* (für eine Surfzeit von 0 - 100 Stunden) graphisch dar:

Der Telefonanbieter bietet folgende Tarifmodelle an:

Tarif A: Grundgebühr 5Fr/Monat
die ersten 10 Stunden gebührenfrei, dann 0.5Rp/min.

Tarif B: Grundgebühr 10Fr / Monat
die ersten 20 Stunden gebührenfrei, dann 0.4Rp/min.

Flatrate 25Fr/Monat

Beantworte mit Hilfe deiner graphischen Darstellung die folgenden Fragen:

1. Wieviel kosten 30 Stunden surfen mit Tarif A ?
2. Wieviel kosten 60 Stunden surfen mit Tarif B ?
3. Wieviel kosten 90 Stunden surfen mit der Flatrate ?
4. Für welche Surfzeit herrscht Kostengleichheit für die Tarife A und B ?
5. Willi surft durchschnittlich zweieinhalb Stunden täglich.
   (a) Welches Modell ist für Willi günstiger, A oder B ?
   (b) Ab welcher Surfzeit sollte Willi die Flatrate wählen ?
6. Welches Modell ist bei Deinem Surfverhalten das günstigere ?

1.4 Funktionsgleichungen

Bei der Bearbeitung der bisherigen Fragen, die nicht durch Werten oder Messergebnisse vorgegebenen sind, können wir nur ungefähre Antworten geben.
Die Genauigkeit lässt sich verbessern, z.B. durch

-
-
-

Diese *Vorschriften* werden durch sogenannte *Funktionsgleichungen* dargestellt, welche in der Mathematik in ihrer Allgemeinheit sehr intensiv behandelt werden und auch in der gymnasialen Ausbildung einen grossen Stellenwert einnehmen.
Die Basis bildet der Begriff der *Funktion*.

Wir werden in diesem Kapitel losgelöst von praktischen Experimenten oder Datensätz die *Funktion* und zugehörige Begriffe und Schreibweisen in voller Allgemeinheit kennenlernen, so dass ihr sie später problemlos in der Physik, Chemie,Wirtschaft, ... anwenden könnt.

1.4.1 Definitionen

Wir beginnen mit der Definition einer Funktion, in welcher die zentralen Eigenschaften der Zuordnung, wie wir sie schon in den bisherigen Beispielen kennengelernt haben, eingebunden werden:

Def.:	Seien $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ zwei nicht-leere Mengen. Eine **Abbildung / Funktion** $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ ist eine .... , die .... Element aus $\mathbb{A}$ .... ein Element aus $\mathbb{B}$ zugeordnet.

Bem.:

-
-
-

Beispiel 1.1

- $f(3) = 9$
- $f(5) = 25$
- $f(-2) = 4$
-
-
-

Beispiel 1.2 $g(x) = -x$

1. $g(2) = -2$
2. $g(18) =$
3. $g(-7) =$

Beispiel 1.3 $h(x) = x^2 - 2$

1. $h(7) =$
2. $h(3) =$
3. $h(0) =$
4. $h(-3) =$

Aufgaben 1.3

- $g(x) := -5x + 23, \quad h(x) := -2x^3 + 5x$
  Berechne die folgenden Werte:

  1. $g(1) = \ldots$
  2. $h(0) = \ldots$
  3. $g(23) = \ldots$
  4. $h(-5) = \ldots$
  5. $g(6) = \ldots$
  6. $h(-4) = \ldots$
  7. $g(0) = \ldots$
  8. $h(3) = \ldots$

- $a(x) := x - 2, \quad b(x) := x^2, \quad c(x) := -4x + 15$
  Berechne die zugehörigen Argumente:

  1. $a(x) = 7$
  2. $b(x) = -0.125$
  3. $c(x) = 0$
  4. $a(x) = -2$
  5. $b(x) = 0.25$
  6. $c(x) = 20$

Aufgaben 1.4

- *Definiere die Funktion mit dem Namen q und der Variablen t, welche vom 8fachen des Argumentes 5 subtrahiert.*
- *Definiere die Funktion mit dem Namen y und der Variablen x, welche vom Quadrat aus der Summe des Argumentes und 12 das halbe Argument subtrahiert.*
- *Berechne*

  1. $q(0) =$
  2. $y(0) =$
  3. $q(2) =$
  4. $y(-1) =$

Analysis-Aufgaben: *Funktionen (Grundlagen) 2*
(Zugehörige Lösungen)

1.4.2 Zurück zum *freien Fall*

Im Folgenden wollen wir die Funktionsgleichungen für unsere Bewegungen (die Herleitung erfolgt später in der Physik) verwenden, um den sprachlichen Gebrauch einzuüben und unsere Genauigkeit beim *Ablesen* der Antworten aus der graphischen Darstellung auf ihre Genauigkeit hin zu überprüfen

Beispiel 1.4 ... *jeder* aufgewendeten Zeit wird *genau eine* zurückgelegte Wegstrecke zuordnet:

$$s(t) = \frac{9.81}{2} \cdot t^2$$

1. $s(2) =$

   Ausgedeutscht bedeutet das

   -
   -

2. $s(10) =$
3. Bestimme die zurückgelegte Wegstrecke nach $5s$
4. Ob wir mit den obigen Resultaten richtig liegen, können wir kontrollieren:
5. Mit $s(t)$ berechnen wir somit ...

Beispiel 1.5 ... *jeder* aufgewendeten Zeit wird *genau eine* momentane Geschwindigkeit zuordnet:

$$v(t) = 9.81 \cdot t$$

- Berechne $v(1) =$
- Bestimme die Geschwindigkeit nach $5s$ freiem Fall
- Wie lange muss ein Körper fallen, um eine momentane Geschwindigkeit von $75m/s$ zu erreichen ?

Aufgaben 1.5

- *Formuliere eine eigene Fragenstellung:*
- *Bestimme die zugehörige mathematische Darstellung:*
- *Bestimme die Lösung rechnerisch:*

Beispiel 1.6 ... *jeder* zurückgelegter Strecke wird *genau eine* aufgewendete Zeit zuordnet:

$$t(s) = \sqrt{\frac{2s}{9.81}}$$

Aufgaben 1.6

- $t(15) =$
- $t(450) =$
- *Bestimme die Zeit, welche für* $250m$ *aufgewendet werden müssen.*
- *Nach* $12s$ *wird welche Strecke zurückgelegt ?*
- *Der Strecke* $100m$ *wird welche Zeit zugeordnet?*
- *Der Zeit* $5s$ *wird welche Strecke zugeordnet ?*

1.4.3 Anwendungen von Funktionen im Alltag

Wie schon angesprochen bilden die Funktionen ein sehr interessantes und weitläufiges Gebiet in der Mathematik. Neben den äusserst interessanten *Diskussionen von Funktionen* haben die Funktionen auch einen sehr grossen Anwendungsbereich in der Wirtschaft, Biologie, Gesellschaft, natürlich der Physik und vielem mehr ... dazu die folgenden Beipsiele.
Wir werden die folgenden Situationen durch Funktionen darstellen, ohne diese selber herzuleiten..

- **Wirtschaft**
  Wir wollen die Entwicklung eines Kontos untersuchen, das mit einem Startkapital von Fr. 1'000.- eröffnet wir und mit einem jährlichen Zinssatz von 5% verzinst wird:

- **Biologie**
  Wir wollen der Frage nachgehen, wie sich der Algenteppich auf einem Teich vergrössert, wenn er heute morgen um 8:00 schon mit 5% Algen bedeckt ist und die Algenfläche sich alle 4 Stunden verdoppelt:

- **Gesellschaft**
  Wir wollen uns hier mit der Frage beschäftigen, wie sich die Bevölkerungsanzahl in der Schweiz entwickelt, wenn wir von einer Bevölkerungszahl im Jahr 2010 von 7.825 Mio und eine halbjährlichen Wachstum von 1% ausgehen:

- **Geometrie**
  Wir wollen unseren Geometriekenntnissen etwas vorgreifen und uns mit dem Umfang und Flächeninhalt eines Kreises in Abhängigkeit vom Radius befasssen:

1.5 Definitions- & Wertebereich, die Verknüpfung von Funktionen

- $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$

- $x \overset{f}{\mapsto} x^2$

- $f(x) = x^2$

Beispiel 1.7 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}\ ,\ x \overset{f}{\mapsto} \frac{1}{x^2}$

1. $\mathcal{D}(f) =$
2. $\mathcal{W}(f) =$
3. die zugehörige Funktionsgleichung lautet:
4. $f(3) =$
5. $f(\frac{1}{2}) =$

Beispiel 1.8 $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}\ ,\ t \overset{g}{\mapsto} 2t - 3$

1. $\mathcal{D}(g) =$
2. $\mathcal{W}(g) =$
3. die zugehörige Funktionsgleichung lautet:
4. $g(4) =$
5. $g(0) =$

Beispiel 1.9 $a : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\ ,\ a(r) = r^3 - r^2 \quad , \quad b : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\ ,\ b(r) = 2r$

1. $a(1) =$
2. $b(2) =$
3. $a \circ b(2) =$
4. $a \circ b(1) =$
5. $b \circ a(2) =$
6. $b \circ b(0) =$
7. $a \circ b \circ a(-1) =$

Beispiel 1.10 $f(x) = x + 1, \quad g(x) = x^2$

1. $f(2) =$
2. $g(4) =$
3. $f \circ g(4) =$
4. $f \circ f(2) =$
5. $g(a) =$
6. $f(k^2) =$
7. $f \circ g(x) =$
8. $g \circ f(x) =$

Analysis-Aufgaben: *Funktionen (Grundlagen) 3*
(Zugehörige Lösungen)

1.6 Von der Funktionsgleichung zum Graphen

Ein wichtiges Thema in der Mathematik wird später die *Diskussion von Funktionen* sein. Wir werden dann unter Anwendung weiterer mathematischer Hilfsmittel *Extremas, Nullstellen, Monotonieverhalten, ...* einer Funktion exakt bestimmen. Wenn wir uns vom Verlauf der Funktion ein *Bild* machen, d.h. die Funktion *graphisch* darstellen, können wir jetzt schon einige dieser Eigenschaften ungefähr bestimmen.

Wir wollen die Darstellung an der folgenden Funktion

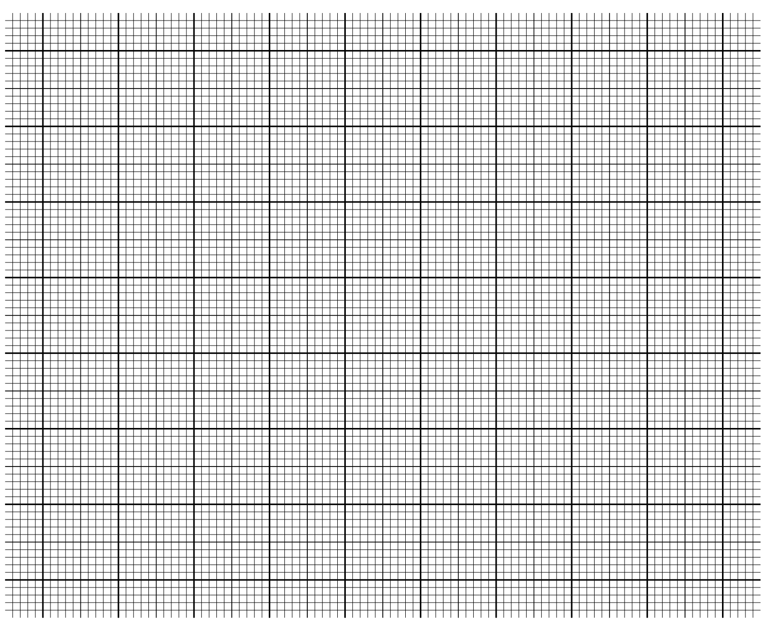
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \quad f(x) = x^2 + 1.5x - 4.5$$

besprechen:

1. *Wertetabelle:*

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)									

2. *Graphische Darstellung:*

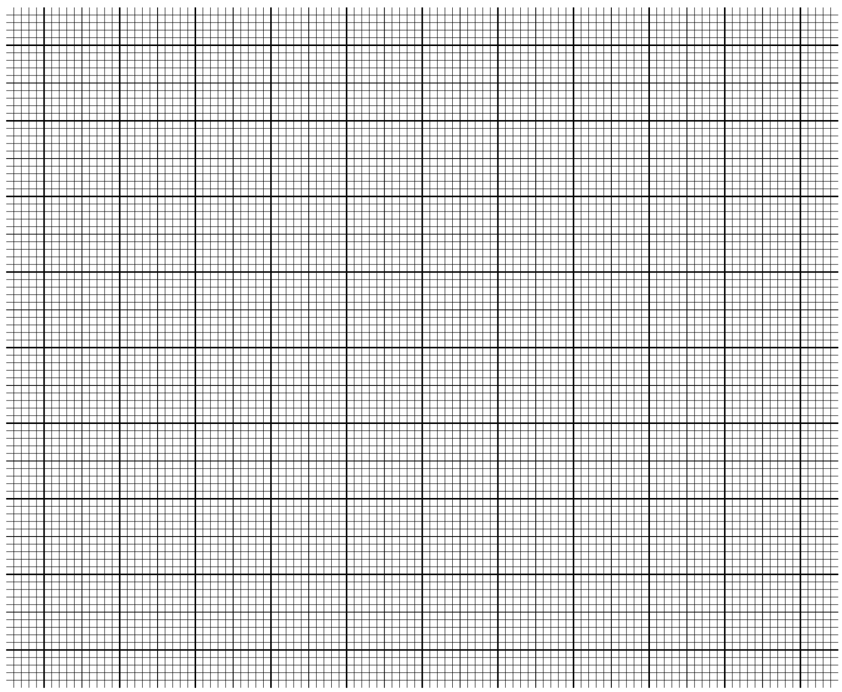


Beispiel 1.11

Mit diesem Beispiel wollen wir den ersten Einsatz elektronischer Hilfen besprechen und weitere zentrale Begriffe im Zusammenhang mit Funktionn besprechen.
Dazu verwenden wir die folgenden Funktionen:

$$f(x) = x^2 - 6.25 \quad \text{und} \quad g(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

(Verwende als Argumente: -4, -3.5, -3, $\ldots$ 3.5, 4 und auf der y-Achse von -8 bis 40)

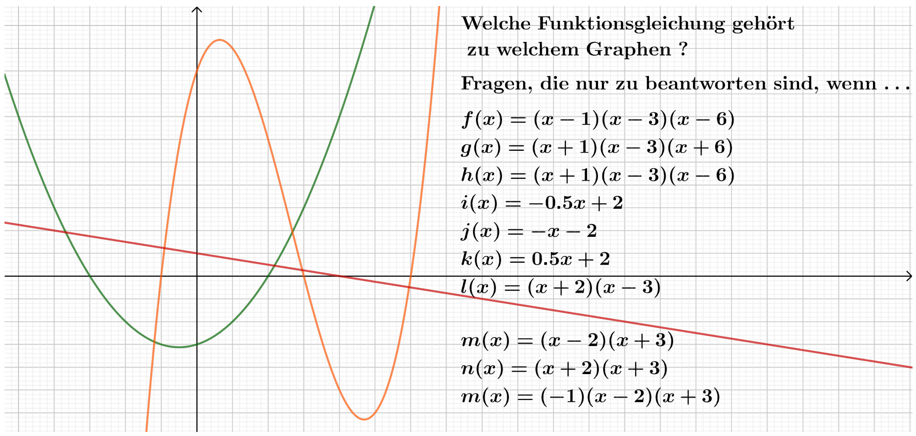


Bestimme weiter

- die Nullstellen von f:
- den Achsenabschnitt von g:
- den Schnittpunkt von f mit der y-Achse:
- die Schnittpunkte von g mit der x-Achse:
- die Schnittstellen von f und g:

Analysis-Aufgaben: *Funktionen (Grundlagen) 4*
(Zugehörige Lösungen)

1.6.1 Betrachtungen am Graphen

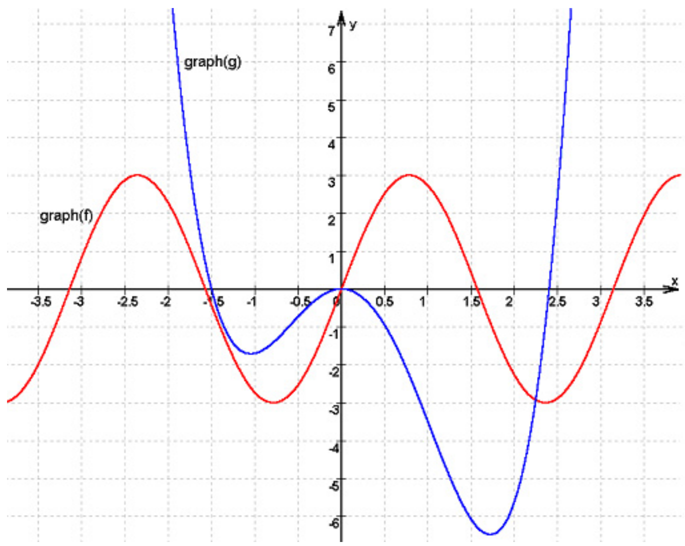


Beispiel 1.12 *Bestimme nur mit Hilfe der graphischen Darstellung:*

- $m(-3) =$
- $m(x) = 0$
- $m(0) =$
- $m(x) = -10$
- $h(6) =$
- $h(x) = -4$
- $h(-1) =$
- $h(x) = 22$
- $i(x) = 0$
- $i(x) = -2$
- $i(0) =$
- $i(-4) =$

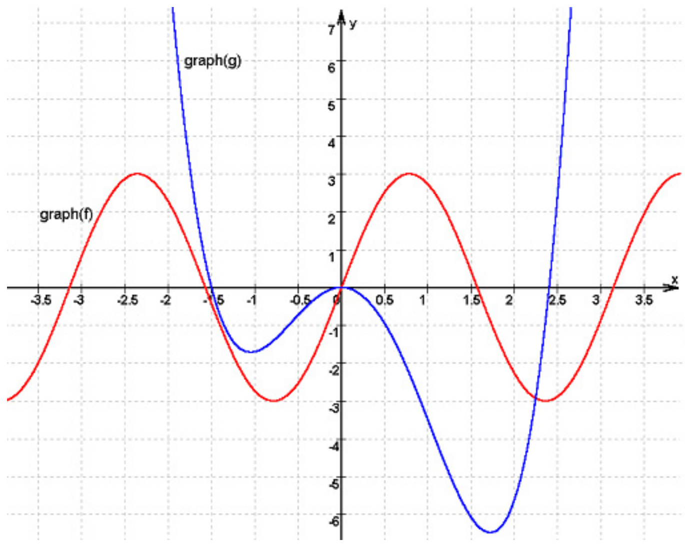
1.7 Mengentheoretische Betrachtungen im & am Graphen

Am folgenden Beispiel der graphischen Darstellung zweier Funktionen ...



... wollen wir die folgenden Mengen kennzeichnen:

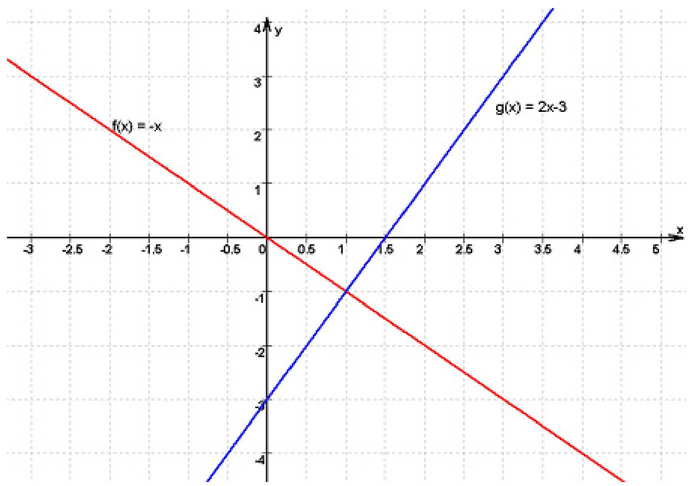
1. $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \leq 0\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 2\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 2\}$
5. $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < -2\}$
6. $\{x \in \mathbb{N} \mid f(x) = g(x)\}$



7. $\{(x \mid y) \mid x = -2.5\}$
8. $\{(x \mid y) \mid y = 0\}$
9. $\{(x \mid y) \mid x \geq 2 \wedge y < -4\}$
10. $\{(x \mid y) \mid x = 1 \wedge y = f(x) > 2\}$
11. $\{(x \mid y) \mid x = 1 \wedge y = f(x) > 3\}$
12. $\{(x \mid y) \mid y = g(x)\}$

Von grosser Bedeutung ist auch die Betrachtung des Graphen einer Funktion als eine Menge.

Versuche, in dem Du einige Elemente (Punkte) eines Graphen bestimmst, mit Hilfe der folgenden Beispiele den Graphen einer Funktion als eine Menge zu beschreiben:



Def.:	Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann gilt: $graph(f) := \{\ldots$

Aufgaben 1.7 *Wir gehen von der folgenden Funktion aus:*

$$f(x) = 3x - 2.$$

1. *Welche der folgenden Punkte sind Elemente des Graphen von f:*
   (Begründe deine Antwort!)
   (a) $A = (0/-2)$
   (b) $B = (3/7)$
   (c) $C = (-3/-7)$
   (d) $D = (\frac{2}{3}/0)$
2. *Bestimme die fehlende Koordinate so, dass der Punkt auf dem Graphen von f liegt:*
   (a) $E = (1/y_E)$
   (b) $F = (x_F/-1)$
   (c) $G = (-5/y_G)$
   (d) $H = (x_H/-35)$

Analysis-Aufgaben: *Funktionen (Grundlagen) 6*
(Zugehörige Lösungen)
Analysis-Aufgaben: *Funktionen (Grundlagen) 6b*
(Zugehörige Lösungen)

1.8 Funktionen & *GeoGebra* - ein selbständiges Kennenlernen

Für ein selbständiges Kennenlernen & Einarbeiten in eine Auswahl der Möglichkeiten von *GeoGebra* im Bereich der Funktionen verwenden wir unter folgendem Link

www.ronaldbalestra.ch/Informatik/Geogebra/

das Skript

Einführung in *GeoGebra*: Funktionen - Grundlagen,
welche auf das aktuelle Skript zurückgreift.
(bei einzelnen Anwendungen werden funktionale Zusammenhänge ohne Herleitungen verwendet)

Einführung in *GeoGebra*: Funktionen - Grundlagen & erste Anwendungen,
welche auf das aktuelle Skript *und* auf Kenntnisse über affine Funktionen zurückgreift.
(auch hier gilt, dass bei einzelnen Anwendungen funktionale Zusammenhänge ohne Herleitungen verwendet werden.)

1.9 *Meine* Zusammenfassung