Die Funktionen

eine Einführung

durchgeführt in der
Arbeitswoche der W3a in Tenero im April '24

Gymnasiale Mittelstufe

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

Name:

Vorname:

8. April 2024

0 Unsere Ziele

0.1 Unsere Ziele sind

- den mathematisch ausserordentlich wichtigen *Begriff einer Funktion* kennenzulernen, zu verstehen und anwenden zu können,
- die ersten Anwendungen der Freeware *GeoGebra* (https://www.geogebra.org/) im Bereich der *Analysis*,
  GeoGebra wird mittels den Anwendungen in den einzelnen Themenbereichen eingesetzt und so kennengelernt.
  Für ein selbständiges Einarbeiten in *GeoGebra, classic5*
- die *mathematischen Grundlagen, Definitionen und Sprech- & Schreibweisen.*

Zur Veranschaulichung werden wir uns mit alltäglichen Beispielen aus der Wirtschaft und Natur beschäftigen und diese mit Hilfe mathematischer Zugänge durcharbeiten und insbesondre interpretieren.
Wir werden die funktionalen Zusammenhänge, welche wir als Beispiele verwenden, *nicht* herleiten (das folgt später). Wir verwenden sie ausschliesslich zur Veranschaulichung und als Übungsobjekte

0.2 Ein kleiner Ausblick:

> Mit dem Begriff der *Funktion* werden wir ein Hilfsmittel der Mathematik kennenlernen, welches von zentraler Bedeutung ist.
> Mit Hilfe von Funktionen lassen sich Bewegungsabläufe oder Veränderungen beschreiben, Vorhersagen über das Bevölkerungswachstum machen, die Bahn eines Satelliten im Weltraum berechnen, ... und vieles mehr.
> Mathematisch betrachtet ist eine Funktion nur eine *Vorschrift*, die einem Element aus der einen Menge genau ein Element in einer anderen Menge *zuordnet*.

In einem mathematischen Zusammenhang wurde der Begriff *Funktion* erstmals von Leibniz 1673 verwendet, in seiner Abhandlung *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus.* (dt.: Eine Methode, Tangenten umzukehren - oder: über Funktionen).
Der Begriff der Funktion hatte bei Leibniz jedoch noch nicht die heutige mathematische Bedeutung. Vielmehr wird er im Sinne von funktionieren einer Wirkungsweise eines Gliedes innerhalb eines Organismus bzw. einer Maschine verstanden.
Bei Leibniz findet sich auch erstmals die heute alltäglich verwendete Schreibweise $f(x) = y$.

Für weitere Informationen zur geschichtlichen Entwicklung des Begriffs der Funktion von den Babyloniern bis heute empfiehlt sich die Arbeit von Horst Hischer zur *Geschichte des Funktionsbegriffs*, Universität Saarland

http://www.math.uni-sb.de/service/preprints/preprint54.pdf

Die Eigenschaften und die Diskussion von Funktionen werden im weiteren Mathematikunterricht der gymnasialen Ausbildung eine sehr sehr wichtige und zentrale Rolle spielen.

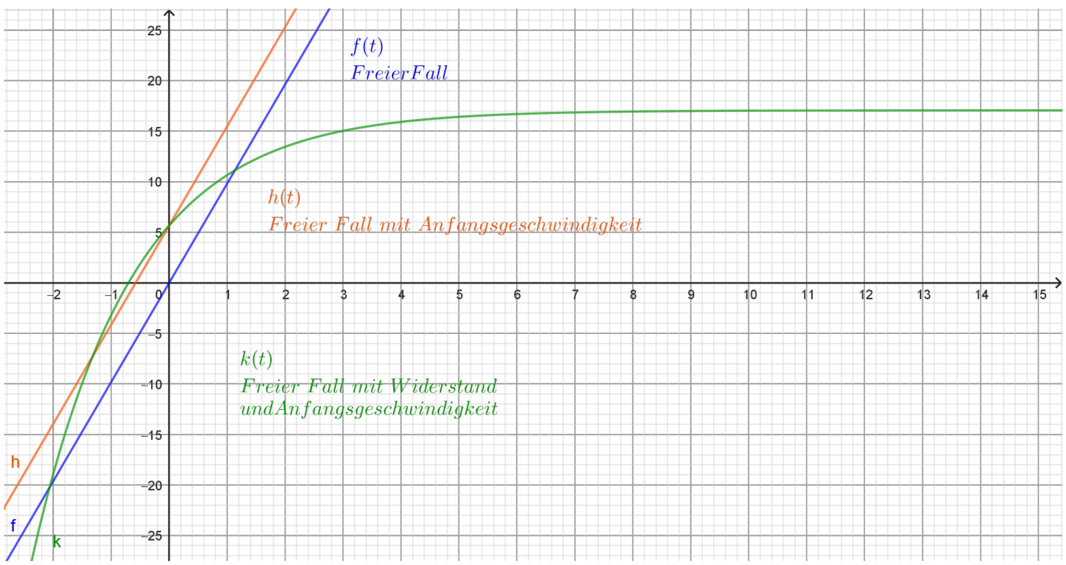
1 Der Freie Fall

Um was geht's ?

Die Grundbegriffe und Definitionen bei Funktionen

Wir schauen uns die graphische Darstellung des Freien Falls an:

- der Freie Fall, mit & ohne
- der Freie Fall mit Anfangsgeschwindigkeit
- der Freie Fall mit Luftwiderstand (Stokes)

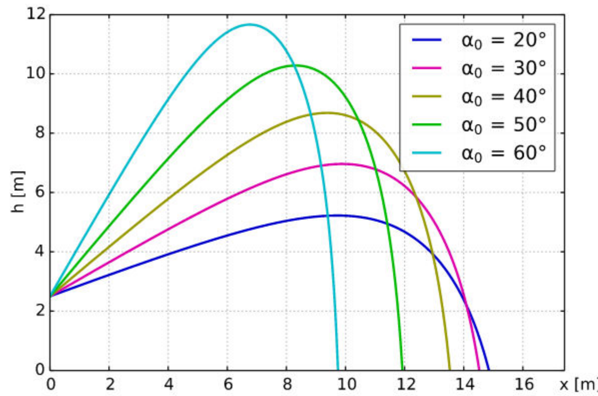


$$f(t) = g \cdot t$$

$$h(t) = v_0 + g \cdot t$$

$$k(t) = \frac{m \cdot g}{b} \left(\frac{m \cdot g}{b} - v_0 \right) e^{-\frac{c}{m \cdot t}}$$

• Die Wurfparabel mit Luftwiderstand



Unsere zentralen Begriffe sind:

- **Zuordnung**

  jeder Zeit wird die aktuelle Geschwindigkeit zugeordnet

  jeder Wurfweite wird die Wurfhöhe zugeordnet

- **Abhängigkeit**

  die aktuelle Geschwindigkeit hängt von der Dauer des freien Falles ab

  die Wurfhöhe hängt von der Wurfweite ab

- **Koordinatensystem**

  zwei Achsen,
  die t-Achse, x-Achse für **die Argumente**, **die Stellen** wo ....
  die y- Achse, für die Werte der Funktion.

  die Orientierungen beider Achsen

  die Einheiten auf beiden Achsen

  den Ursprung

Wir kennen nun die Eigenschaften einer Funktion und sind in der Lage, den Begriff der *Funktion* zu definieren:

Definition 1.1 (*Die Funktion*)

Eine **Abbildung**, *eine* **Funktion** $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ *ist eine* Vorschrift, *die* jedem *Argument* genau einen *Funktionswert* zugeordnet.

1.1 Schreib- & Sprechweise und die Verknüpfung von Funktionen

- $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$

  $\mathbb{A}$:= **Definitionesbereich von** f =: $\mathcal{D}(f)$
  ist die Menge aller zulässiger Argumente (der Funktion f)

  $\mathbb{B}$:= **Wertebereich von** f =: $\mathcal{W}(f)$
  ist die Menge aller zulässiger (Funktions-) Werte

- $x \overset{f}{\mapsto} x^2$

  ist die sog. **Funktionsvorschrift**

- $f(x) = x^2$

  ist die sog. **Funktionsgleichung**

Beispiel 1.1 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $x \overset{f}{\mapsto} \frac{1}{x^2}$

1. $\mathcal{D}(f) =$
2. $\mathcal{W}(f) =$
3. *die zugehörige Funktionsgleichung lautet:*
4. $f(3) =$
5. $f(\frac{1}{2}) =$

Beispiel 1.2 $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$, $t \overset{g}{\mapsto} 2t - 3$

1. $\mathcal{D}(g) =$
2. $\mathcal{W}(g) =$
3. *die zugehörige Funktionsgleichung lautet:*
4. $g(4) =$
5. $g(0) =$

Beispiel 1.3 $a : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\ ,\ a(r) = r^3 - r^2 \quad , \quad b : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\ ,\ b(r) = 2r$

1. $a(1) =$
2. $b(2) =$
3. $a(0) =$
4. $b(-1 =$
5. $a \circ b(2) =$
6. $a \circ b(1) =$
7. $b \circ a(2) =$
8. $b \circ b(0) =$
9. $a \circ b \circ a(-1) =$

Beispiel 1.4 $f(x) = x + 1, \quad g(x) = x^2$

1. $f(2) =$
2. $g(4) =$
3. $f(0) =$
4. $g(-1) =$
5. $f \circ g(4) =$
6. $f \circ f(2) =$
7. $g(a) =$
8. $f(k^2) =$
9. $f \circ g(x) =$
10. $g \circ f(x) =$

1.2 Aufgaben

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad x \overset{f}{\mapsto} 2x^2 - 12 \quad ; \qquad g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \overset{g}{\mapsto} 5x$
   Berechne die folgenden Funktionswerte:
   (a) $f(0) = \ldots$
   (b) $g(-2) = \ldots$
   (c) $f \circ f(5) = \ldots$
   (d) $g \circ g(2) = \ldots$

2. $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, \quad t \overset{x}{\mapsto} \frac{t}{t-5} \quad ; \qquad y : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad t \overset{y}{\mapsto} t^2 - 2t$
   Berechne die folgenden Funktionswerte:
   (a) $x(6) = \ldots$
   (b) $y(6) = \ldots$
   (c) $x \circ y(3) = \ldots$
   (d) $y \circ x(3) = \ldots$

3. Bestimme für die folgenden Funktionen den *kleinstmöglichen* Wertebereich:
   (a) $a : \mathbb{N} \to \ldots,$ für $x \mapsto x^2$
   (b) $b : \mathbb{N} \to \ldots,$ für $x \mapsto (-4x)^2$
   (c) $c : \mathbb{Z} \to \ldots,$ für $x \mapsto x^2$
   (d) $d : \mathbb{N} \to \ldots,$ für $x \mapsto \frac{1}{x}$

4. Bestimme für die folgenden Funktionen den *grösstmöglichen* Definitionsbereich:
   (a) $r : \ldots \to \mathbb{N}_0,$ für $q \mapsto -q$
   (b) $s : \ldots \to \mathbb{Q},$ für $t \mapsto t^2$
   (c) $t : \ldots \to \mathbb{Z},$ für $v \mapsto -v^3$
   (d) $u : \ldots \to \mathbb{Z}_{<0},$ für $w \mapsto (-w)^3$

Für die gleichen und mehr Aufgaben:

Analysis-Aufgaben: *Funktionen (Grundlagen) 3*
(Zugehörige Lösungen)