Analysis-Aufgaben: *Integralrechnung 10*

1. Beweise mit Hilfe einer homogenen, gewöhnlichen, linearen Differentialgleichunng 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten die folgenden Behauptungen:

   (a) Wenn $x_1(t)$ eine Lösung der Gleichung ist, so ist auch $x(t) = C \cdot x_1(t)$ eine Lösung der Gleichung. ($C \in \mathbb{R}$)

   (b) Wenn $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen der Gleichung sind, so ist auch die aus ihnen gebildete Linearkombination $x(t) = C_1 \cdot x_1(t) + C_2 \cdot x_2(t)$ eine Lösung der Gleichung. ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$)

2. (a) Charkterisiere die folgende Differentialgleichung:

   $$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$$

   (b) Beweise, dass die Gleichung die folgenden linear unabhängigen Lösungen besitzt:

   $$x_1(t) = e^{-t} \cdot \sin t \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{-t} \cdot \cos t$$

   (c) Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

3. Beweise, dass die folgenden Funktionen

   $$x_1(t) = e^t \ , \quad x_2(t) = e^{-t} \ , \quad x_3(t) = e^{-2t}$$

   eine Fundamentallösung der Gleichung

   $$x^{(3)} + 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0$$

   bilden.

4. Bestimme die allgemeinen Lösungen der folgenden Gleichungen:

   (a) $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0$
   (b) $2\ddot{x} + 20\dot{x} + 50x = 0$
   (c) $2\ddot{x} + 7\dot{x} = -3x$
   (d) $x^{(3)} - 7\dot{x} + 6x = 0$
   (e) $x^{(3)} - 4\ddot{x} - 11\dot{x} = 6x$
   (f) $2x^{(4)} + 4x^{(3)} - 24\ddot{x} + 28\dot{x} - 10x = 0$
   (g) $x^{(5)} + 2x^{(4)} + x^{(3)} = 0$

5. Löse die folgenden AWP's:

   (a) $\ddot{x} + 20\dot{x} + 64x = 0 \quad , \qquad x(0) = 0\ ,\ \dot{x}(0) = 2$
   (b) $x^{(3)} - 3\ddot{x} + 4x = 0 \quad , \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0\ ,\ \ddot{x}(0) = 1$
   (c) $x^{(3)} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0 \quad , \qquad x(0) = 0\ ,\ \dot{x}(0) = 1\ ,\ \ddot{x}(0) = 0$

Die Lösungen zu den Aufgaben 4. und 5. sind *(ohne Gewähr)* :

4. (a) $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-3t}$
   (b) $x(t) = (C_1 + C_2t)e^{-5t}$
   (c) $x(t) = C_1e^{-0,5t} + C_2e^{-3t}$
   (d) $x(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-3t}$
   (e) $x(t) = (C_1 + C_2t)e^{-t} + C_3e^{6t}$
   (f) $x(t) = (C_1 + C_2t + C_3t^2)e^t + C_4e^{-5t}$
   (g) $x(t) = C_1 + C_2t + C_3t^2 + (C_4 + C_5t)e^{-t}$

5. (a) $x(t) = \frac{1}{6} \cdot (e^{-4t} - e^{-16t})$
   (b) $x(t) = \frac{1}{9}e^{-t} + (-\frac{1}{9} + \frac{1}{3}t)e^{2t}$
   (c) $x(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$