

Analysis-Aufgaben: Integralrechnung 4

1. Berechne die folgenden Integrale:

(a) $\int_1^4 \frac{1-x}{\sqrt{x}} dx$

(b) $\int \alpha^3 \cos(\alpha^2) d\alpha$

2. Sei $f(x) = x^2 - 4x + 1$ und $g(x) = -x^2 + 6x - 7$.

Bestimme den Inhalt der Fläche zwischen dem $graph(f)$ und dem $graph(g)$.

3. Sei $f(x) = x^4 - 2x^3$ und $g(x) = 2 - x$.

Bestimme den Inhalt der Fläche zwischen dem $graph(f)$ und dem $graph(g)$.

4. Sei $f(x) = x + \sin x$.

(a) Skizziere den Verlauf des zugehörigen Graphen über $[0, 2\pi]$.

(b) Berechne ...

i. $\int_0^1 f(x) dx = \dots$

ii. $\int_0^\pi f(x) dx = \dots$

iii. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi} f(x) dx = \dots$

(c) Berechne den Inhalt des Flächenstücks zwischen dem $graph(f)$, der y -Achse und der Geraden $y = 2\pi$.

5. Sei $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{9}{2}$ und $g(x) = ax$.

(a) Berechne den Inhalt A der Fläche, die von der Parabel und der x -Achse im 1. Quadranten eingeschlossen wird.

(b) Bestimme die Koordinaten der Punkte P und Q , in denen sich die Graphen von f und g schneiden.

(c) Berechne den Inhalt $A = A(a)$ der Fläche, die im 1. Quadranten zwischen $graph(f)$ und $graph(g)$ liegt.

(d) Für welche Wahl von a liegt im 1. Quadranten keine Fläche zwischen $graph(f)$ und $graph(g)$.
(Skizziere die Situation.)

(e) Für welchen Wert von a ist $A(a)$ achtmal so gross wie die Fläche zwischen der Parabel und der x -Achse?
(Die gesuchte Fläche liegt nicht mehr nur im 1. Quadranten)

6. Eine Parabel schneidet die x -Achse in den Punkten $P = (0/0)$ und $Q = (4/0)$ und begrenzt mit der x -Achse eine Fläche mit Inhalt $\frac{64}{3}$. Bestimme die zugehörige Funktionsgleichung.

7. Wir betrachten die folgende Funktion:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$$

Bestimme den Inhalt der vom Graphen von f und der x -Achse begrenzten Fläche.

8. Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades hat im Ursprung einen Wendepunkt und an der Stelle $x_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ein lokales Extremum. Für $x \geq 0$ schliesst er mit der x -Achse eine Fläche mit Inhalt $= \frac{3}{4}$ ein. Bestimme die zugehörige Funktionsgleichung und skizziere den Graphen.

9. Wir betrachten die folgende Funktion:

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$$

- (a) Diskutiere vollständig $g(x)$.
- (b) Bestimme die Koordinaten der Berührungspunkte der Tangenten an den Graphen von g , die parallel zur Geraden $y = 3x + 6$ verlaufen und die Funktionsgleichungen für diese Tangenten.
- (c) Bestimme für eine der Tangenten aus (b) einen weiteren Schnittpunkt mit dem Graphen von g .
- (d) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von g und der Tangente aus (c).

10. Wir betrachten die folgende Funktion:

$$h(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{4}{3}x$$

- (a) Diskutiere vollständig $h(x)$.
- (b) Die Tangente durch das lokale Maximum im Punkt $P_0 = (x_0/y_0)$ schneidet den Graphen von h in einem weiteren Punkt $P_1 = (x_1/y_1)$. Beweise, dass gilt: $x_1 = -2x_0$
- (c) Bestimme den Inhalt der Fläche zwischen dieser Tangente und dem Graphen von h .
- (d) Beweise die folgende Aussage:

Die Beziehung aus (b) gilt für jede Funktion vom Typ $f(x) = ax^3 + bx$, wenn zusätzlich noch die Bedingung $a \cdot b < 0$ erfüllt ist.