

Analysis-Aufgaben: Integralrechnung 6

Die folgenden Aufgaben sind in Gruppen zu bearbeiten.
Erwartet wird die Abgabe einer Musterlösung und deren Präsentation
in einer max 15minütigen Vorstellung.

1. Vorgegeben sind die Funktionen

$$f(x) = ax \quad \text{und} \quad g(x) = \sqrt{2 - ax} \quad , \quad a > 0$$

- (a) Skizziere ihre Graphen im gleichen Koordinatensystem.
- (b) Das von den Graphen und der x -Achse eingeschlossene Flächenstück rotiert um die x -Achse.
Wie ist a zu bestimmen, damit das Volumen des Rotationskörpers genau π Volumeneinheiten beträgt ?
- (c) Für welchen Wert von a schneiden sich die Graphen unter einem rechten Winkel?

(Quelle: **E. Rhyn:** *Analysis*; Maturaufgabe Nr.54 , p.46)

2. Vorgegeben ist die Funktion

$$f(x) = a \cdot \frac{x - 2}{x^2} \quad , \quad a > 0$$

- (a) Führe eine Kurvendiskussion durch und zeichne den zugehörigen Graphen.
- (b) Die Fläche, die im 1. Quadranten von der x -Achse und dem Graphen von f begrenzt wird, rotiert um die x -Achse.
Bestimme a so, dass das Volumen des Rotationskörpers $V = 6\pi$ beträgt.
- (c) Für welchen Wert von a schneidet die Tangente im Extremum die Normale zur Tangente in der Nullstelle genau auf der y -Achse ?

(Quelle: **E. Rhyn:** *Analysis*; Maturaufgabe Nr.57 , p.47)

3. Vorgegeben sind die Funktionen

$$f(x) = x - \sqrt{x} \quad \text{und} \quad g(x) = -x^3 - x^2 + 2x$$

- (a) Bestimme von beiden Funktionen die Nullstellen und Extremas und stelle ihre Graphen im gleichen Koordinatensystem dar.
- (b) Bestimme den Inhalt der Fläche, die von beiden Kurven begrenzt wird ?
- (c) Die vom Graphen von f , der y -Achse und der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P = (1/0)$ begrenzte Fläche rotiert um die x -Achse.
Berechne das Volumen des Rotationskörpers.

(Quelle: **E. Rhyn:** *Analysis*; Maturaufgabe Nr.58 , p.47)

4. Vorgegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{3x^2}$$

- (a) Führe eine Kurvendiskussion durch und skizziere den zugehörigen Graphen.
- (b) Bestimme den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f , der nicht-senkrechten Asymptote und links von der Geraden $x = 1$ begrenzt wird.
- (c) Welcher Punkt auf dem Graphen von f liegt im 1. Quadranten und hat vom Ursprung des Koordinatensystems den kleinsten Abstand ?

(Quelle: **E. Rhyn:** *Analysis*; Maturaufgabe Nr.59 , p.47)

Lösungen:

- (a) i. $V = \frac{5\pi}{6a}$; $a = \frac{5}{6}$
ii. $a = \sqrt{2}$
- (b) i. $V = \frac{1}{6}a^2\pi$; $a = 6$
ii. Normale = $-\frac{4}{a}x + \frac{8}{a}$, Tangente = $\frac{a}{8}$; $a = 8$
- (c) i. $A = \frac{7}{12}$
ii. Tangente = $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; $V = \frac{\pi}{20}$
- (d) i. $A = \frac{2}{3}$
ii. $P = (1/1)$