

Analysis-Aufgaben: *Integralrechnungen - STEREOMETRIE*

Prismen und Zylinder:

1. Berechne den Inhalt der Oberfläche, das Volumen und die Länge der Raumdiagonalen eines Würfels mit der Kantenlänge $s = 30\text{cm}$.
(Lösungen: $O = 5400\text{cm}^2$, $V = 27000\text{cm}^3$, $d = 51.962\text{cm}$)
2. Bei einem Würfel wird die Kantenlänge von 5cm verdoppelt.
Berechne die Oberfläche und das Volumen des grösseren Würfels und vergleiche die Werte mit denjenigen des ursprünglichen Würfels.
Was fällt auf ?
(Lösungen: 2^2 -fache Oberfläche, 2^3 -faches Volumen)
3. Bestimme das Volumen eines Kleiderschranks, der 2.3m hoch, 85cm breit und 600mm tief ist.
Bestimme weiter die Länge der Körperdiagonalen.
(Lösungen: $V = 1.173\text{m}^3$, $d = 2.524\text{m}$)
4. Bei einem geraden Prisma ist die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge von 5cm . Die Höhe des Prismas beträgt 15cm .
Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen des Prismas.
Bestimme die Länge der längsten Geraden, die in ein solches Prisma eingezeichnet werden kann.
(Lösungen: $O = 246.651\text{cm}^2$, $V = 162.380\text{cm}^3$, $g = 15.811\text{cm}$)
5. Berechne den Inhalt des Mantels und der Oberfläche und das Volumen eines geraden Kreiszyinders, dessen Durchmesser 3m und dessen Höhe 8m ist.
(Lösungen: $M = 75.398\text{m}^2$, $O = 89.535\text{m}^2$, $V = 56.549\text{m}^3$)
6. Der Durchmesser eines geraden Kreiszyinders misst 14cm . Der maximale Inhalt der Schnittfläche einer senkrecht zur Grundfläche stehenden Ebene durch den Zylinder beträgt 42cm^2 .
Berechne den Inhalt der Oberfläche und das Volumen des Zylinders.
(Lösungen: $O = 439.823\text{cm}^2$, $V = 461.814\text{cm}^3$)
7. Bestimme den Durchmesser eines Kupferdrahtes mit einer Dichte von 8.9g/cm^3 , damit ein Stück von 1cm Länge 5g wiegt.
(Lösung: $d = 0.846\text{cm}$)

8. Ein Bleiwürfel besitzt eine Kantenlänge von 12cm . Wie tief taucht dieser Würfel in Quecksilber ein ?
 (Hinweis: Ein Körper taucht so weit in eine Flüssigkeit ein, bis das Gewicht des Körpers gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit ist;
 Dichte Pb = 11.3g/cm^3 , Dichte Hg = 13.6g/cm^3 .)
 (Lösungen: Eintauchtiefe = 9.971cm)
9. Einem Quader mit den Kanten $a = 12\text{cm}$, $b = 5\text{cm}$ und $c = 15\text{cm}$ wird ein Kreiszyylinder mit der Höhe c eingeschrieben.
 Bestimme die Mantelfläche und das Volumen des Zylinders.
 (Lösungen: $M = 235.619\text{cm}^2$, $V = 294.524\text{cm}^3$)

Pyramiden und Kreiskegel:

1. Berechne das Volumen einer Pyramide, wenn die Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit einem Umfang von 24cm ist und die Körperhöhe 20cm misst.
 Berechne weiter den Inhalt des Mantels und der Oberfläche.
 (Lösungen: $V = 184.752\text{cm}^3$, $M = 241.595\text{cm}^2$, $O = 269.308\text{cm}^2$)
2. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein regelmässiges Sechseck. Die Höhe der Pyramide misst 12cm und die Höhe der Seitendreiecke 13cm . Bestimme das Volumen und die Oberfläche dieser Pyramide.
 (Lösungen: 346.410cm^3 , $O = 311.769\text{cm}^2$)
3. Berechne den Inhalt der Oberfläche und das Volumen eines Kreiskegels mit einem Radius von 5cm und einer Höhe von 12cm .
 (Lösungen: $O = 282.743\text{cm}^2$, $V = 314.159\text{cm}^3$)
4. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 15\text{mm}$ und $b = 8\text{mm}$ rotiert um die Seite a .
 Berechne den Inhalt der Oberfläche und das Volumen des so entstandenen Kreiskegels.
 (Lösungen: $O = 628.318\text{mm}^2$, $V = 1005.310\text{mm}^3$)
5. Ein Kreissektor hat einen Zentriwinkel von 120° und einen Flächeninhalt von 462cm^2 . Dieser Sektor wird zu einem Kegel zusammengebogen.
 Bestimme den Inhalt der Kegeloberfläche.
 (Lösung: $O = 616.000\text{cm}^2$)

6. Ein kegelförmiger Trichter hat oben einen Durchmesser von 16cm .
Wie hoch muss der Trichter sein, wenn er (ohne Ansatzrohr) genau einen Liter fassen soll ?
(Lösungen: $h = 14.921\text{cm}$)

7. Berechne den Unterschied zwischen dem Inhalt der Oberfläche einer quadratischen Pyramide mit der Grundkante $a = 10\text{cm}$ und dem Inhalt der Oberfläche eines Würfels mit einer Kantenlänge von 10cm , wenn beide Körper das gleiche Volumen haben.
(Lösungen: 108.276cm^2)

8. Ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 6cm wird um eine Diagonale gedreht.
Berechne den Inhalt der Oberfläche des so entstandenen Rotationsdoppelkegel.
(Lösungen: $O = 159.994\text{cm}^2$)

9. Ein regelmässiges Sechseck mit einem Flächeninhalt von 390m^2 rotiert um eine durch die Mitten zweier gegenüberliegenden Seiten gehende Achse.
Berechne das Volumen des entstandenen Rotationskörpers.
(Lösung: $V = 5837.762\text{m}^2$)

Kugel und Kugelteile:

1. Berechne den Inhalt der Oberfläche und das Volumen einer Kugel, mit
 - (a) $r = 6\text{cm}$,
 - (b) $U = 88\text{cm}$.
 (Lösungen: (a) $O = 452.389\text{cm}^2$, $V = 904.779\text{cm}^3$)
 (b) $O = 2464.992\text{cm}^2$, $V = 11507.925\text{cm}^3$)

2. Die Erde hat einen Durchmesser von rund $12'740\text{km}$.
Berechne den Inhalt der Oberfläche und das Gewicht der Erde, wenn die mittlere Dichte $5,56\text{kg}/\text{m}^3$ beträgt.
(Lösungen: $O = 509.904 \cdot 10^6\text{km}^2$, $m = 6.020 \cdot 10^21\text{kg}$)

3. Die Oberflächen dreier Kugeln verhalten sich zueinander wie $4 : 9 : 16$. Der Radius der grössten Kugel beträgt 12cm .
 Berechne die Längen der Radien der andern beiden Kugeln und die Volumina aller Kugeln.
 Was fällt bei einem Vergleich der Resultate auf ?
 (Lösungen: Vergleich der Radien: $r_1 : r_2 : r_3 = 2 : 3 : 4$)
 Vergleich der Oberflächen: $O_1 : O_2 : O_3 = 4 : 9 : 16$
 Vergleich der Volumen: $V_1 : V_2 : V_3 = 8 : 27 : 64$
4. Um einen Würfel mit einer Oberfläche von 150cm^2 ist eine Kugel gezeichnet, welche durch die Ecken des Würfels geht.
 Berechne das Volumen dieser umbeschriebenen Kugel.
 (Lösung: $V = 340.087\text{cm}^3$)
5. Für welchen Radius sind die Masszahlen von Oberfläche und Volumen der zugehörigen Kugel gleich ?
 (Lösung: $r = 3$)
6. Ein Luftballon befindet sich 5km über der Erde. ($r_E = 6'370\text{km}$)
 Wie gross ist das Gebiet der Erdoberfläche, welches von Ballon aus übersehen werden kann ?
 (Lösung: $O = 199962.496\text{km}^2$)
7. Piccard verwendete für seine Tiefseeveruche ein Stahlkugel. Der äussere Durchmesser der Kugel betrug 2.16m , die Wandstärke 0.13m .
 Berechne das Gewicht der Stahlkugel, mit einer Dichte von $7,8\text{g/cm}^3$.
 (Lösung: $m = 13.145\text{t}$)

Weitere Aufgaben:

1. In einem Kegel beträgt der Radius des Grundkreises 12cm und die Höhe 20cm .
 In welcher Höhe muss ein Kegel parallel zur Grundfläche der Ebene geschnitten werden, damit die Schnittfläche 210cm^2 misst ?

2. In einem Kegel ist die Mantelfläche doppelt so gross wie die Grundfläche. Wie hoch ist der Kegel, wenn das Volumen $V = 100$ ist?

3. In einem Kegel mit dem Grundradius $r = 2$ und der Höhe $h = 3.5$ wird ein Würfel so einbeschrieben, dass der Würfel auf der Grundfläche steht. Bestimme die Kantenlänge k des Würfels.

4. Das gleichschenklige Trapez $ABCD$ mit folgenden Grössen
 - Grundlinie = 14,
 - Mittellinie = 12,
 - Höhe = 4.
 rotiert um die Achse AB .
 Berechne das Volumen und die Oberfläche des Rotationskörpers.

5. Das Volumen eines Zylinders ist so gross wie das einer Kugel vom selben Radius.
 Welcher Körper hat die grössere Oberfläche?

6. Aus einem geraden Kegelstumpf mit Grundflächenradius $r_1 = 8$, Deckflächenradius $r_2 = 5$ und Höhe $h = 6$ wird (von oben) ein kegelförmiger Krater herausgebort, dessen Spitze bis auf den Grund des Kegelstumpfes geht.
 Bestimme ...
 - (a) die Oberfläche,
 - (b) das Volumen
 des Restkörpers.

7. Ein Würfel und eine Kugel haben eine gleiche Oberfläche von $O = 1$.
 Welcher Körper hat das grössere Volumen?

8. Wieviel Prozent des zur Verfügung stehenden Raumes wird "verschenkt", wenn eine Kugel in einen möglichst kleinen zylinderförmigen Karton verpackt wird?

9. Skizziere das Netz und das Schrägbild eines geraden Kegelstumpfes und leite die allgemeinen Formeln zur Berechnung
- (a) der Mantelfläche,
 - (b) der Oberfläche und
 - (c) des Volumens
- her.
10. Bestimme das Volumen einer Pyramide mit Hilfe einer Zerlegung in infinitesimale Quader (Scheibermethode)
(Verwende hierzu:
<http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/didmath/volumen/volumen.pdf>)
11. Von einem rechteckigen Stück Karton mit den Seitenlängen $a = 15$ und $b = 24$ wird an jeder Ecke ein Quadrat mit der Seitenlänge x weggeschnitten. Durch Auffalten der vorstehenden Rechtecke lässt sich aus dem Reststück eine nach oben offene Schachtel bilden.
Bestimme das x , so dass die Schachtel maximales Volumen hat.
12. Einem gleichschenkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit der Basis a und der Höhe h ist ein Rechteck einzubeschreiben.
Bestimme das Verhältnis der Rechteckshöhe zur Dreieckshöhe, wenn
- (a) die Rechtecksfläche maximal sein soll,
 - (b) der Umfang des Rechtecks maximal sein soll.
13. Ein gleichschenkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit dem Umfang $U = 10$ rotiert um seine Höhe.
Bestimme die Länge der Grundlinie von $\triangle ABC$, wenn der entstehende Kegel maximales Volumen haben soll.