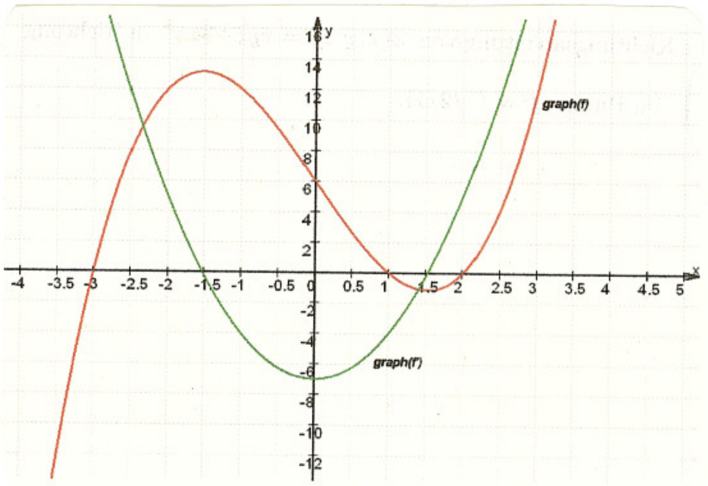
Analysis-Aufgaben: Integralrechnung 0

⋮

③ $f(x) = (x-2)(x+3)(x-1)$



a) Beh.: f ist nicht monoton fallend

Beweis: Ann. f ist monoton fallend

$\Leftrightarrow \quad f'(x) \le 0 \;, \; \forall x \in D(f)$

$f'(x) \overset{TR}{=} 3x^2 - 7$

für z.B. $x = 10$: $f'(x) > 10 \;\Rightarrow\; f$ kann nicht monoton fallend sein. ☐

b) Beh.: f ist auf $[2, \infty[$ streng monoton steigend.

Beweis: z.z. ist: $f'(x) > 0 \;, \; \forall x \in [2, \infty[$

$f'(x) = 3x^2 - 7$ ist eine nach oben geöffnete Parabel, mit den NS $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall\, x > \sqrt{\frac{7}{3}} = 1{,}528$ ☐

c) Beh.: f ist nicht beschränkt.

Beweis:
- b) $\Rightarrow f$ ist auf $[2, \infty[$ streng monoton ↗
- $\nexists$ Grenzwert $\lim_{x \to \infty} f(x)$

$\Rightarrow f$ ist nicht nach oben beschränkt

$\Rightarrow f$ ist nicht beschränkt. ☐

d) Beh.: $f(x_0)$ ist ein lokales, aber kein globales Maximum

Beweis: i) $f'(x_0) = 0 \;\wedge\; f''(x_0) \overset{TR}{=} -9{,}168 < 0 \;\Rightarrow$ lok. Max. ✓

ii) $f(x_0) = 13{,}128$, $f(10) = 936$ $\Rightarrow$ kein glob. Max. ✓

☐

e) Beh.: f hat auf $[1,2]$ ein lokales & globales Minimum

Beweis: $f'(x) = 0 \overset{TR}{\Rightarrow} x_{1,2} = \pm 1{,}528$ Stellen für lokale Extrema

$f''(1{,}528) < 0 \;\Rightarrow\; f(1{,}528) = -1{,}128$ ist lok. Min. auf $[1,2]$.

$f'(x)$ ist auf $]1{,}528, 2] > 0 \;\Rightarrow\; f$ ist streng monoton ↗ rechts von $1{,}528$

$f'(x)$ ist auf $[1, 1.528[\; < 0 \;\Rightarrow\; f$ ist streng monoton ↘ links von $1{,}528$

$\Rightarrow$ das lokale Minimum ist auch globales Minimum. ☐

(4) • $f(x) = \frac{x^4+16}{x^2} \quad \left(= \frac{p(x)}{q(x)} \right)$

Diskussion: • $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

• ⇒ mögliche Pol: $x_0 = 0$: $\left.\begin{array}{l} p(x_0) \neq 0 \\ q(x_0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $x_0 = 0$ ist ein Pol (ohne VZW)

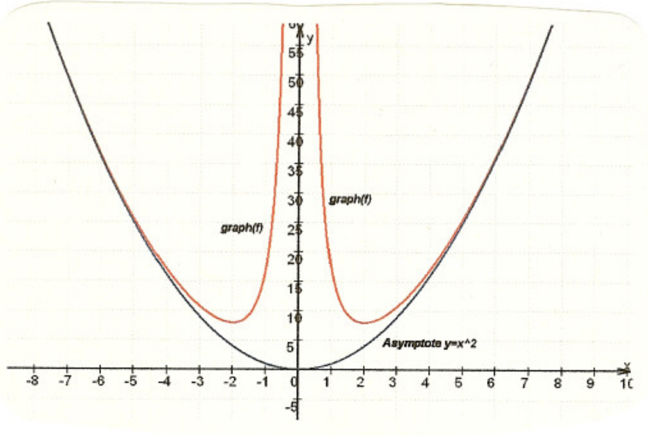
• $f'(x) = 0 \overset{TR}{\iff} x_{2,3} = \pm 2$ sind mögliche Extremstellen.

$f''(2) \overset{TR}{=} 8 > 0 \Rightarrow$ Lokales Minimum $= f(2) = 8$, an der Stelle $x_2 = 2$

$f''(-2) \overset{TR}{=} 8 > 0 \Rightarrow$ Lokales Minimum $= f(2) = 8$, an der Stelle $x_3 = -2$

• $f''(x) = 0$ ↯ $_{TR}$ ⇒ kein WP

• $f(x) \overset{TR}{=} x^2 + \frac{16}{x^2}$ ⇒ asymptotisches Verhalten: $y = x^2$



• $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$

• geht durch den Ursprung ⇒ $f(0)=0$

• besitzt im Punkt W... ⇒ $f(1) = -2$

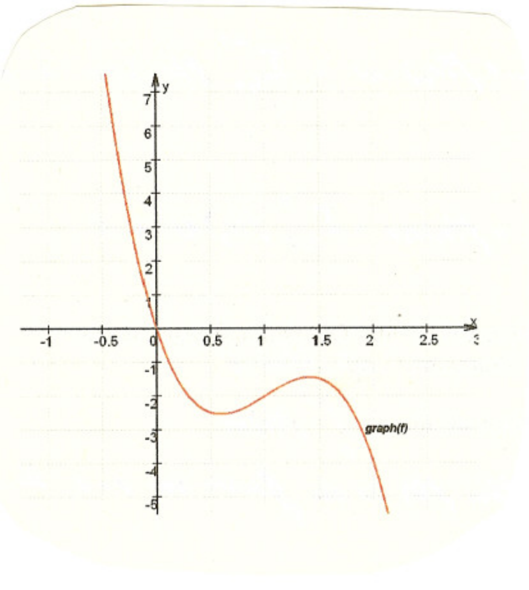
einen Wendepunkt ⇒ $f''(1) = 0$

• Wendetangente t ⇒ $t(x) = a_t x + b_t$, $t(1) = -2$

schneidet die x-Achse ... ⇒ $t(2) = 0$

$\overset{TR}{\Rightarrow} t(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(1) = 2$

$\left.\right\} \overset{TR}{\Rightarrow} f(x) = -4x^3+12x^2-10x$



- $f(x) = \dfrac{ax^2+bx+c}{(x+d)^n}$

- Asymptote $y = x-2 \Rightarrow \underline{\underline{n=1}}$

  - $f(x) \overset{TR}{=} ax - ad + b + \underbrace{\dfrac{ad^2-bd+c}{x+d}}_{\xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0} = x-2$

    $\Leftrightarrow \underline{\underline{a=1}} \wedge \underline{b-d=-2}$

- Pol $x_1=-1 \Rightarrow a-b+c \neq 0 \wedge \underline{-1+d=0} \Rightarrow \underline{\underline{d=1}}$ $\Big\} \Rightarrow \underline{\underline{b=-1}}$

- Extremstelle $x_2 = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$

  $\overset{TR}{\Rightarrow} \underline{\underline{c=2}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x+1}}}$