Analysis-Aufgaben: Integralrechnung 10

1 $\ddot x + a\dot x + bx = 0 \qquad (*)$

a) Beh.: $x_1(t)$ Lösg von $(*)$ $\Rightarrow$ $x(t) = C\cdot x_1(t)$ ist ebenfalls Lösg von $(*)$. , $C \in \mathbb{R}$

Beweis:

$$\left.\begin{aligned} \dot x &= C\cdot \dot x_1 \\ \ddot x &= C\cdot \ddot x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot x + a\dot x + bx = C\cdot\ddot x_1 + a\cdot C\dot x_1 + b\cdot C x_1$$

$$= C\cdot(\underbrace{\ddot x_1 + a\cdot \dot x_1 + b\cdot x}_{=0}) = 0 \quad \square$$

b) Beh.: $x_1(t), x_2(t)$ Lösg von $(*)$ $\Rightarrow$ $x(t) = C_1\cdot x_1(t) + C_2\cdot x_2(t)$ ist ebenfalls Lösg von $(*)$., $C_{1,2} \in \mathbb{R}$

Beweis:

$$\left.\begin{aligned} \dot x &= C_1\dot x_1 + C_2\dot x_2 \\ \ddot x &= C_1\ddot x_1 + C_2\ddot x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ddot x + a\dot x + bx = C_1\ddot x_1 + C_2\ddot x_2 + a\cdot(C_1\dot x_1 + C_2\dot x_2) + b\cdot(C_1x_1 + C_2x_2)$$

$$= C_1(\underbrace{\ddot x_1 + a\dot x_1 + bx_1}_{=0}) + C_2(\underbrace{\ddot x_2 + a\dot x_2 + bx_2}_{=0})$$

$$= 0 \quad \square$$

2 a) gewöhnliche, homogene, linear Diff.gleichung 2. Ordnung mit konst. Koeff.

b)
$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= e^{-t}\sin t \\ x_2(t) &= e^{-t}\cos t \end{aligned}\right\}$$ sind lin. unabhängig. ✓ [illegible: opening bracket]ohne weiteres Eingehen auf LK...)

$$\dot x_1 = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t$$

$$\ddot x_1 = (e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t) + (-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot x_1 + 2\dot x_1 + 2x_1 = e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t - e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$$

$$+\, 2\cdot(-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)$$

$$+\, 2\cdot e^{-t}\sin t \qquad = \quad 0 \qquad \square$$

analog für $x_2(t)$.

c) $\underline{\underline{x(t) = C_1\cdot e^{-t}\sin t + C_2 e^{-t}\cos t}}$

③ Beh.: $x_1(t) = e^{t}$, $x_2(t) = e^{-t}$, $x_3(t) = e^{-2t}$

bilden ein Fundamentallösung für

$$x^{(3)} + 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0 \qquad (*)$$

Beweis: i) x_1, x_2, x_3 sind lin. unabhängig

ii) Zeige, daß $\underbrace{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3}_{= x(t)}$ Lösung von (*) ist.

$$x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-2t}$$
$$\dot{x}(t) = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t} - 2C_3 e^{-2t}$$
$$\ddot{x}(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + 4C_3 e^{-2t}$$
$$x^{(3)}(t) = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t} - 8C_3 e^{-2t}$$

$$\Rightarrow x^{(3)} + 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t} - 8C_3 e^{-2t} + 2\cdot(C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + 4C_3 e^{-2t}) - (C_1 e^{t} - C_2 e^{-t} - 2C_3 e^{-2t}) - 2(C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + C_3 e^{-2t})$$

$$= 0$$

□

④ a) $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0$

$\Rightarrow \underline{\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 1}$

$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{t}}}$

b) $2\ddot{x} + 20\dot{x} + 50x = 0 \Rightarrow p(\lambda) = 2\lambda^2 + 20\lambda + 50 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda + 5)^2 = 0$

$\Rightarrow \underline{\lambda_1 = \lambda_2 = -5}$

$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 t e^{-5t}}}$

c) $2\ddot{x} + 7\dot{x} = -3x \Leftrightarrow 2\ddot{x} + 7\dot{x} + 3x = 0 \Rightarrow p(\lambda) = 2\lambda^2 + 7\lambda + 3 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow \underline{\lambda_1 = -1/2,\ \lambda_2 = -3}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = C_1 e^{-1/2\cdot t} + C_2 e^{-3t}}}$

d) $x^{(3)} - 7\dot{x} + 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$

$\Rightarrow \underline{\lambda_1 = 1}$ (durch pröbeln!)

$\underset{\sim\sim\sim}{p(\lambda) : (\lambda - \lambda_1)} \Leftrightarrow (\lambda^3 - 7\lambda + 6) : (\lambda - 1) = \underline{\lambda^2 + \lambda - 6}$

(Abspalten der NS)

$$
\begin{array}{l}
-(\lambda^3 - \lambda^2) \\
\hline
\lambda^2 - 7\lambda + 6 \\
-(\lambda^2 - \lambda) \\
\hline
-6\lambda + 6 \\
\hline
\end{array}
$$

$= (\lambda + 3)(\lambda - 2)$

$\Rightarrow \underline{\lambda_2 = -3,\ \lambda_3 = 2}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{-3t} + C_3 e^{2t}}}$$

e) $x^{(3)} - 4\ddot{x} - 11\dot{x} = 6x \quad \Leftrightarrow \quad x^{(3)} - 4\ddot{x} - 11\dot{x} - 6x = 0$

$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 - 11\lambda - 6 = 0$

$\Rightarrow \underline{\lambda_1 = -1}$ (durch pröbeln!)

$p(\lambda) : (\lambda - \lambda_1) \Leftrightarrow (\lambda^3 - 4\lambda^2 - 11\lambda - 6) : (\lambda + 1) = \underline{\lambda^2 - 5\lambda - 6}$

$$
\begin{array}{l}
-(\lambda^3 + \lambda^2) \\
\hline
-5\lambda^2 - 11\lambda - 6 \\
-(-5\lambda - 5\lambda) \\
\hline
-6\lambda - 6 \\
\hline
\end{array}
$$

$= (\lambda - 6)(\lambda + 1)$

$\Rightarrow \underline{\lambda_2 = 6,\ \lambda_3 = -1}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + C_3 e^{6t}}}$$

f) $2 \cdot x^{(4)} + 4x^{(3)} - 24\ddot{x} + 28\dot{x} - 10x = 0 \Rightarrow p(\lambda) = 2\lambda^4 + 4\lambda^3 - 24\lambda^2 + 28\lambda - 10 = 0$

$\Rightarrow \underline{\lambda_1 = 1}$ (durch pröbeln)

Abspalten der 1. NS: $(2\lambda^4 + 4\lambda^3 - 24\lambda^2 + 28\lambda - 10) : (\lambda - 1) = \underline{2\lambda^3 + 6\lambda^2 - 18\lambda + 10}$

$$
\begin{array}{l}
-(2\lambda^4 - 2\lambda^3) \\
\hline
6\lambda^3 - 24\lambda^2 \\
-(6\lambda^3 - 6\lambda^2) \\
\hline
-18\lambda^2 + 28\lambda \\
-(-18\lambda^2 + 18\lambda) \\
\hline
10\lambda - 10 \\
\hline
\end{array}
$$

$\Leftrightarrow \underline{\lambda_2 = 1}$ (durch pröbeln!)

Abspalten der 2. NS: $(2\lambda^3 + 6\lambda^2 - 18\lambda + 10) : (\lambda - 1) = \underline{2\lambda^2 + 8\lambda - 10}$

$$
\begin{array}{l}
-(2\lambda^3 - 2\lambda^2) \\
\hline
8\lambda^2 - 18\lambda \\
-(8\lambda^2 - 8\lambda) \\
\hline
-10\lambda + 10 \\
\hline
\end{array}
$$

$= 2(\lambda^2 + 4\lambda - 5) = 0$

$\Leftrightarrow \underline{(\lambda + 5)(\lambda - 1) = 0}$

$\Rightarrow \underline{\lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = -5}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x(t) = C_1 e^{t} + C_2 t e^{t} + C_3 t^2 e^{t} + C_4 e^{-5t}}}$$

g) $x^{(5)} + 2x^{(4)} + x^{(3)} = 0 \Rightarrow p(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^4 + \lambda^3 = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda^3(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^3(\lambda+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \ \lambda_4 = \lambda_5 = -1}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 e^{-t} + C_5 t e^{-t}}}$$

⑤ c) $\ddot{x} + 20\dot{x} + 64x = 0 \quad , \quad x(0) = 0 \quad , \quad \dot{x}(0) = 2$

$$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + 20\lambda + 64 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda+16)(\lambda+4) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_1 = -16, \ \lambda_2 = -4} \quad \Rightarrow \underline{\text{allg. Lösg. } x(t) = C_1 e^{-16t} + C_2 e^{-4t}}$$

Bestimmung der Konst.:

$\cdot \ x(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 0$

$\cdot \ \dot{x}(0) = -16 C_1 e^0 - 4 C_2 e^0 = -16 C_1 - 4 C_2 = 2$

$$\Rightarrow 16 C_2 - 4 C_2 = 2 \Leftrightarrow \underline{C_2 = 1/6}$$

$$\Rightarrow \underline{C_1 = -C_2 = -1/6}$$

$$\Rightarrow \text{partikuläre Lösg.:} \quad \underline{\underline{x(t) = -\tfrac{1}{6} e^{-16t} + \tfrac{1}{6} \cdot e^{-4t}}}$$

b) $x^{(3)} - 3\ddot{x} + 4x = 0 \quad , \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad , \quad \ddot{x}(0) = 1$

$$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \underline{\lambda_1 = -1} \quad \text{(durch pröbeln!)}$$

Abspalten der 1. NS:

$$(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4) : (\lambda + 1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2$$

$$\begin{array}{l} -(\lambda^3 + \lambda^2) \\ \hline -4\lambda^2 + 4 \\ -(-4\lambda^2 - 4\lambda) \\ \hline 4\lambda + 4 \\ - \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_2 = \lambda_3 = 2}$$

$$\Rightarrow \underline{\text{allg. Lösg. } x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 t e^{2t}}$$

Bestimmung der Konst.:

$\cdot \ x(0) = C_1 + C_2 = 0$

$\cdot \ \dot{x}(t) = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} + \underbrace{C_3 \cdot e^{2t} + 2C_3 t e^{2t}}_{\text{mit Prod.regel für } C_3 t e^{2t}}$

$$\Rightarrow \dot{x}(0) = -C_1 + 2C_2 + C_3 = 0$$

$\cdot \ \ddot{x}(t) = C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{2t} + 2C_3 e^{2t} + \underbrace{2C_3 e^{2t} + 4C_3 t e^{2t}}_{\text{mit Prod.regel für } 2C_3 t e^{2t}}$

$$\Rightarrow \ddot{x}(0) = C_1 + 4C_2 + 2C_3 + 2C_3$$

$$= C_1 + 4C_2 + 4C_3 = 1$$

$$\begin{array}{l} \text{Lineares} \\ \text{[illegible]} \\ \text{Gl. system} \end{array} \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \xrightarrow{II + I} \\ III - I \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array} \quad \xrightarrow{III - II} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{C_3 = 1/3} \Rightarrow \underline{C_2 = -1/9} \Rightarrow \underline{C_1 = 1/9}$$

$$\Rightarrow \text{partikuläre Lösg.:} \quad \underline{\underline{x(t) = \tfrac{1}{9} e^{-t} - \tfrac{1}{9} e^{2t} + \tfrac{1}{3} t e^{2t}}}$$

c) $x^{(3)} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0 \quad , \quad x(0) = 0 \ , \ \dot{x}(0) = 1 \ , \ \ddot{x}(0) = 0$

$\Rightarrow \ p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\lambda_1 = 1}$ (durch pröbeln!)

Abspalten der 1. NS:

$$(\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda-2)(\lambda+1)$$

$$\begin{array}{l} -(\lambda^3 - \lambda^2) \\ \hline \quad -\lambda^2 - \lambda \\ \ -(-\lambda^2 + \lambda) \\ \hline \qquad -2\lambda + 2 \end{array}$$

$\Rightarrow \ \underline{\lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = -1}$

$\Rightarrow$ allg. Lösg. $\underline{x(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}}$

Bestimmung der Konst.:

$x(0) = \underline{C_1 + C_2 + C_3 = 0}$

$\dot{x}(t) = C_1 e^{t} + 2C_2 e^{2t} - C_3 e^{-t}$

$\dot{x}(0) = \underline{C_1 + 2C_2 - C_3 = 1}$

$\ddot{x}(t) = C_1 e^{t} + 4C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}$

$\ddot{x}(0) = \underline{C_1 + 4C_2 + C_3 = 0}$

Lin. Gl.system $\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{array} \quad \underset{\overline{III}-\overline{I}}{\overset{\overline{II}-\overline{I}}{\rightsquigarrow}} \quad \begin{array}{cccc} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \underline{C_2 = 0} \rightarrow \underline{C_3 = -\tfrac{1}{2}} \Rightarrow \underline{C_1 = \tfrac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$ partikuläre Lösg.: $\underline{\underline{x(t) = \tfrac{1}{2} e^{t} - \tfrac{1}{2} e^{-t}}}$