Analysis - Aufgaben : Integralrechnung 7

(1) $W = \int dW$ , mit $dW = k \cdot s\, ds$ $\quad ( F(s) = ks )$

$k = 8.45 \cdot 10^5\ N/m$

$$= k \cdot \int_0^{0.173} s\, ds = k \cdot \frac{1}{2} s^2 \Big|_0^{0.173} = \underline{\underline{12645\ Nm}}$$

$$\left( = 8.45 \cdot 10^5 \ \frac{N}{m} \cdot \ldots [m^2] \right)$$

(2) $W = \int p(V)\, dV$ , ideales Gas, isotherm $\Rightarrow$ $p \cdot V = n \cdot R \cdot T = \text{konst.}$

Gaskonst.

Molzahl

$$\Rightarrow p = \frac{p_0 \cdot V_0}{V} = p(V)$$

$$\Rightarrow W = \int_{2.75 m^3}^{0.76 m^3} \frac{1250\ N/m^2 \cdot 2.75 m^3}{V}\, dV$$

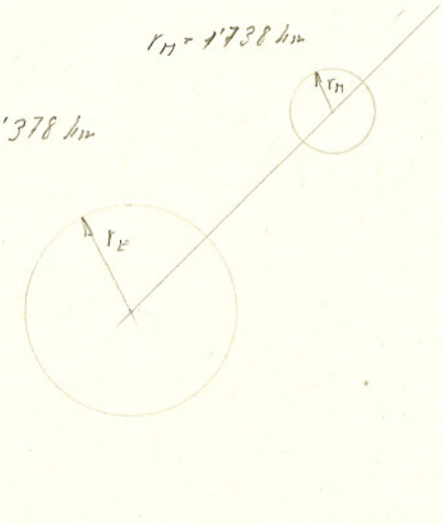
$$= 1'250 \cdot 2.75\ Nm \cdot \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V}\, dV$$

$$= 3'437.5\ Nm \cdot \underbrace{\ln(V) \Big|_{V_0}^{V_1}}_{\ln(V_1) - \ln(V_0) = \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right)} = \ldots = \underline{\underline{-4420\ Nm}}$$

(3)

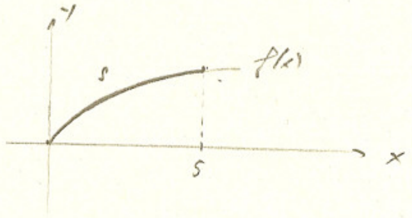
$r_M = 1'738\ km$

$r_E = 6'378\ km$



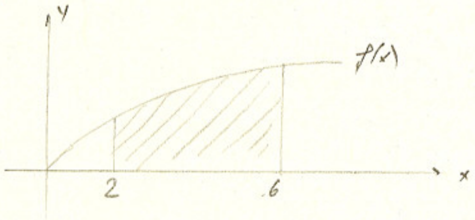
(4) $f(x) = \sqrt{x}$

a)



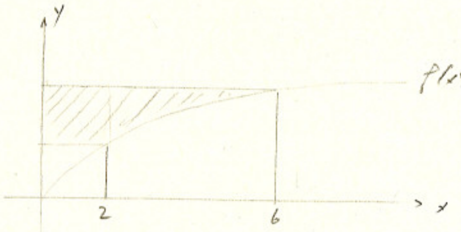

$\underline{s} = \int_0^5 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \underline{\underline{5{,}674}}$

b) i)




$\underline{A} = \int_2^6 f(x)\, dx = \underline{\underline{7{,}512}}$

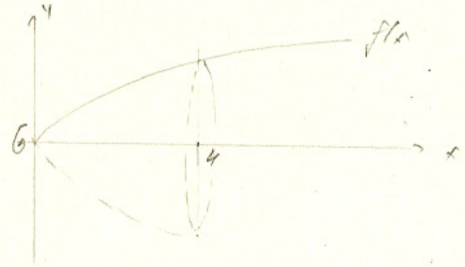
ii)




$\underline{A} = 6 \cdot f(6) - \left(2 \cdot f(2) + \int_2^6 f(x)\, dx\right)$

$= 14{,}697 - (2{,}828 + 7{,}512) = \underline{\underline{3{,}556}}$

c)



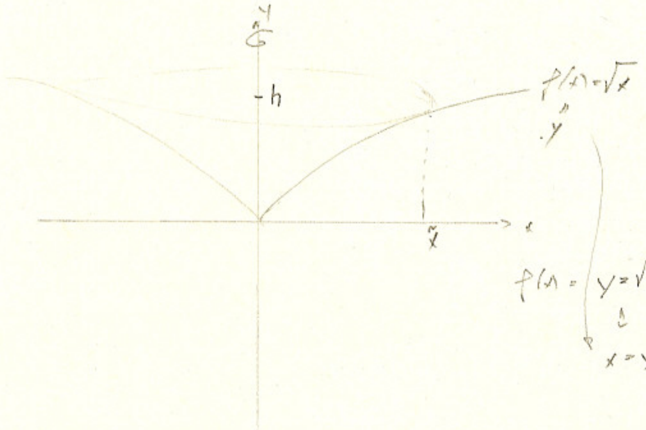

i) $\underline{V} = \pi \cdot \int_0^4 f(x)^2\, dx = \underline{\underline{25{,}133}}$

ii) $O = 2\pi \cdot \int_0^4 f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx + f(4)^2 \cdot \pi$

$= 36{,}177 + 12{,}566$

$= \underline{\underline{48{,}743}}$

d)




$f(x) = y = \sqrt{x}$

$\Updownarrow$

$x = y^2 = g(y)$

i) $V_y = \pi \cdot \int_0^h x^2\, dy$

$(\sqrt{x} = f(x) = y \Rightarrow x^2 = y^4)$

$= \pi \cdot \int_0^h y^4\, dy = 25{,}133$

$\overset{\text{Lös}}{\underset{\text{TR}}{\Longrightarrow}} \quad \underline{\underline{h = 2{,}091}}$

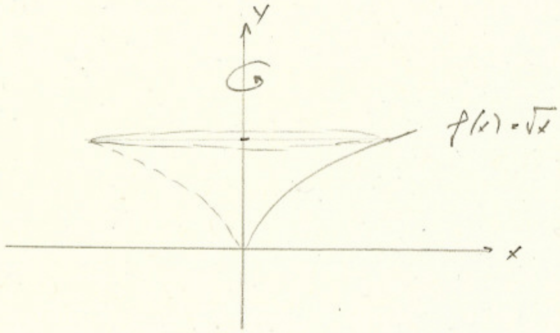
ii) $O_y = 2\pi \int_0^h g(y) \cdot \sqrt{1 + g'(y)^2}\, dy + g(h)^2 \cdot \pi$

$= 2\pi \cdot \int_0^h y^2 \cdot \sqrt{1 + (2y)^2}\, dy + h^4 \cdot \pi = 48{,}743$

$\overset{\text{TR}}{\Longrightarrow} \quad \underline{\underline{h = 1{,}652}}$

④ e) $W = \int dW$

mit $dW = dm \cdot g \cdot y$ ($y \hat{=}$ Höhe)




$dm = dV \cdot \rho$

$dV = x^2 \cdot \pi \cdot dy$

Einführung physik. Einheiten

$f(x) = \sqrt{x} = \sqrt{x \cdot m}$

$\Rightarrow y = \sqrt{x m}$

$\Rightarrow \underline{x^2 = y^4 / m^2}$

$\Rightarrow dW = g y x^2 \pi \rho \, dy$

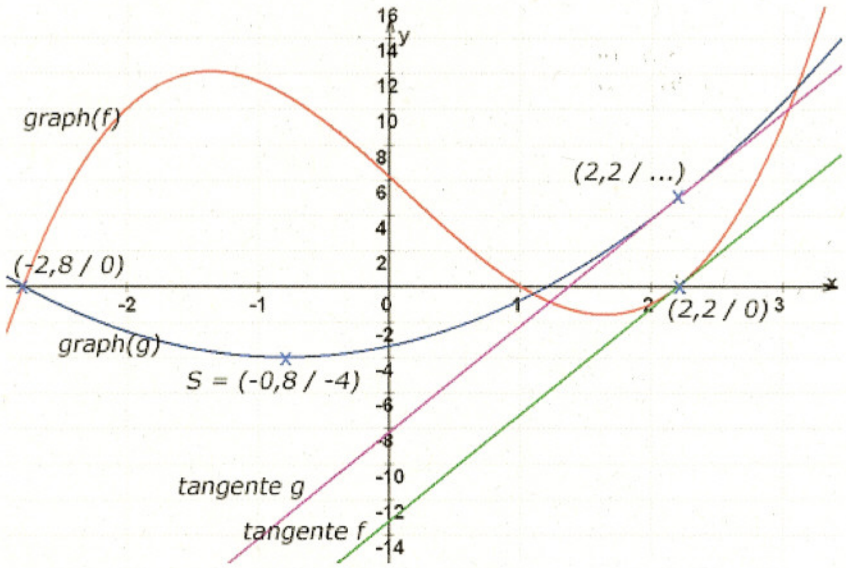
$\Rightarrow W = \int_{0m}^{5m} g \pi \rho \cdot \frac{y^4}{m^2} \cdot y \, dy$

$= 9.81 \, m/s^2 \cdot \pi \cdot 1000 \, kg/m^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{y^6}{m^2} \Big|_0^{5m}$

$= 8{,}026 \cdot 10^7 \, \frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{m^6}{m^5}$

$= \underline{\underline{8{,}026 \cdot 10^7 \, Nm}}$

5. Wir betrachten die folgende graphische Darstellung:




wobei $\overset{\#NU}{\longrightarrow}$ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$g(x) = ex^2 + hx + k$

- $f$ und $g$ Polynomfunktionen kleinstmöglicher Ordnung sind,
- die Tangenten zueinander parallel sind und die $x$-Achse unter einem Winkel von $\phi = 80,538^0$ schneiden $\Rightarrow a_t = \tan\phi = 6$
- der Achsenabschnitt von $f$ 6,160 ist.

Bestimme den Umfang und den Inhalt der durch die Graphen von $f$ und $g$ begrenzten Fläche und die Winkel, unter welchen sich die Graphen von $f$ und $g$ schneiden.

für $g(x)$: · $S = (-0,8/-4)$ = Scheitelpunkt von $g(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow g(-0,8) = 4 \\ \quad g'(-0,8) = 0 \\ \cdot\ \text{Tang.} \Rightarrow g'(2,2) = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} e = 1 \\ h = 1,6 \\ k = -3,36 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{g(x) = x^2 + 1,6x - 3,36}$$



für $f(x)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2,8) = 0 \\ f(0) = 6,160 \\ f(2,2) = 0 \\ f'(2,2) = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f(x) = x^3 - 0,4x^2 - 6,76x + 6,16}$$

%

⑤ mit $f(x) = x^3 - 0{,}4x^2 - 6{,}76x + 6{,}16$

$g(x) = x^2 + 1{,}6x - 3{,}36$

$\Rightarrow$ Schnittstellen sind: $x_1 = -2{,}8$ , $x_2 = 1{,}055$ , $x_3 = 3{,}105$

$$\Rightarrow \cdot\ U = \int_{-2{,}8}^{3{,}105} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx + \int_{-2{,}8}^{3{,}105} \sqrt{1 + g'(x)^2}\, dx$$

$$= 39{,}455 + 20{,}708 = \underline{\underline{60{,}207}}$$

$$\cdot\ A = \int_{-2{,}8}^{1{,}055} f(x) - g(x)\, dx + \int_{1{,}055}^{3{,}105} g(x) - f(x)\, dx$$

$$= 38{,}976 + 6{,}632 = \underline{\underline{45{,}607}}$$

· Schnittwinkel:

$\cdot\ \underline{\underline{\varphi_1}} = \tan^{-1}(f'(x_1)) - \tan^{-1}(g'(x_1))$

$= \tan^{-1}(19) - \tan^{-1}(-4)$

$= 86{,}987^\circ - (-75{,}964^\circ) = \underline{\underline{162{,}951^\circ}} \quad (= 2{,}844)$

$\cdot\ \underline{\underline{\varphi_2}} = \tan^{-1}(g'(x_2)) - \tan^{-1}(f'(x_2))$

$= \tan^{-1}(3{,}750) - \tan^{-1}(-4{,}035)$

$= 75{,}215^\circ - (-76{,}099^\circ) = \underline{\underline{151{,}313^\circ}} \quad (= 2{,}641)$

$\cdot\ \varphi_3 = \tan^{-1}(f'(x_3)) - \tan^{-1}(g'(x_3))$

$= \tan^{-1}(15{,}675) - \tan^{-1}(7{,}810)$

$= 87{,}091^\circ - 82{,}703^\circ = \underline{\underline{4{,}387^\circ}} \quad (= 0{,}077)$

⑥ $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^{x} + e^{-x})$

a) Vollst. Diskussion

· NS: $f(x) = 0 \iff e^{x} = -e^{-x} = -\frac{1}{e^{x}}$

$\iff e^{2x} = -1 \quad ↯ \quad \Rightarrow \nexists$ NS

· SP $= f(0) = 1$

· ES: $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^{x} - e^{-x}) \overset{!}{=} 0$

$\iff e^{x} = e^{-x}$

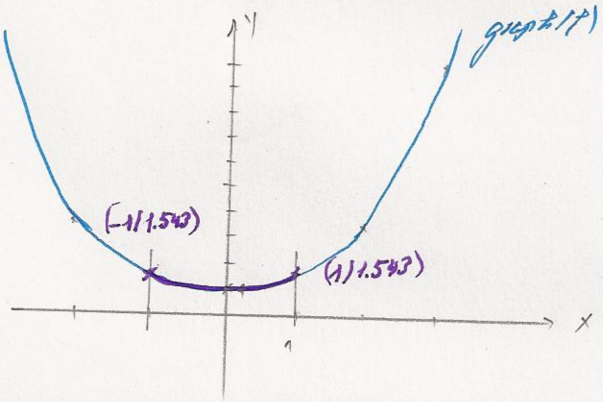
$\iff x = 0$ mögl. ES.

$f''(x) = \frac{1}{2} \cdot (e^{x} + e^{-x})$

$\Rightarrow f''(0) = 1 > 0 \quad \Rightarrow$ $x = 0$ ist ES, mit

$f(0) = 1$ = lok. Min.

· WP: $f''(x) \overset{!}{=} 0 \iff e^{x} = -e^{-x} \quad ↯ \quad \Rightarrow \nexists$ WP




· Symm.: $f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (e^{-x} + e^{-(-x)})$

$= \frac{1}{2} \cdot (e^{x} + e^{-x}) = f(x)$

$\Rightarrow$ Symm. bzgl. y-Achse

b) Approximation im Ursprung $\Rightarrow$ Mac Laurin'sche Polynomentwicklung

$$\underline{f(x) \approx \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n}$$

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= \tfrac{1}{2} \cdot (1-1) = 0 \\ f''(0) &= \tfrac{1}{2} \cdot (1+1) = 1 \\ f^{(3)}(0) = f'''(0) &= \tfrac{1}{2} \cdot (1-1) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Approx. durch } \underline{\underline{p(x)}} = 1 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + \frac{1}{2!} x^2 + 0 \cdot x^3 = \underline{\underline{1 + \tfrac{1}{2} \cdot x^2}}$$

c) Oberfläche ( durch Rot. um x-Achse über $[-1,1]$)

$$\text{Symm.} \Rightarrow \underline{M} = 2 \cdot 2\pi \int_0^1 f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^1 (e^x + e^{-x}) \cdot \sqrt{\frac{4 + (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (e^x + e^{-x}) \cdot \tfrac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x})\, dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^1 e^{2x} + 2 + e^{-2x}\, dx$$

$$= \pi \cdot \left[ \tfrac{1}{2} e^{2x} + 2x - \tfrac{1}{2} \cdot e^{-2x} \Big|_0^1 \right]$$

$$= \pi \cdot \left[ \left(\tfrac{1}{2} e^2 + 2 - \tfrac{1}{2} e^{-2}\right) - \left(\tfrac{1}{2} + 0 - \tfrac{1}{2}\right) \right]$$

$$= \underline{2\pi \cdot (e^2 + 4 - e^{-2})}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{O}} = M + 2 \cdot f(1)^2 \cdot \pi$$

$$= 2\pi (e^2 + 4 - e^{-2}) + \frac{2}{4} (e^2 + 2 + e^{-2}) \pi$$

$$= \pi \left( \tfrac{5}{2} e^2 + 9 - \tfrac{3}{2} e^{-2} \right)$$

$$= \underline{\underline{2\pi (5e^2 + 18 - 3e^{-2})}}$$