Analysis-Aufgaben: Integralrechnung 8

① a) $\ddot{x} + x = 0$ $\Rightarrow$ Beh.: $x(t) = \cos t$ ist Lsg.

Beweis: $\dot{x}(t) = -\sin t$

$\ddot{x}(t) = -\cos t$

$\Rightarrow \ddot{x} + x = -\cos t + \cos t = 0$ □

b) $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 0$ $\Rightarrow$ Beh.: $x(t) = C_1 \cdot e^{5t} + C_2 \cdot e^{-t}$ ist Lsg.

Beweis: $\dot{x}(t) = 5C_1 \cdot e^{5t} - C_2 e^{-t}$

$\ddot{x}(t) = 25C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \ddot{x} - 4\dot{x} - 5x &= 25C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} \\ &\quad - 4 \cdot (5C_1 e^{5t} - C_2 e^{-t}) \\ &\quad - 5 \cdot (C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t}) \\ &= (25-20-5) C_1 e^{5t} + (1+4-5) C_2 e^{-t} \\ &= 0 + 0 = 0\end{aligned}$$ □

c) $t(1+t)\dot{x} = x$ $\Rightarrow$ Beh.: $x(t) = \frac{Ct}{1+t}$ ist Lsg. $\left(QR: \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \right)$

Beweis: $\dot{x}(t) \overset{QR}{=} \frac{C \cdot (1+t) - Ct(0+1)}{(1+t)^2}$

$= \frac{C + Ct - Ct}{(1+t)^2} = \frac{C}{(1+t)^2}$

$\Rightarrow t(1+t) \cdot \dot{x} = t\cancel{(1+t)} \cdot \frac{C}{(1+t)^{\cancel{2}}} = \frac{Ct}{1+t} = x$ □

② $t(1+t)\dot{x} = x$ $\Rightarrow$ Bestimme die Lsg $x(t)$, die durch $P = (1/8)$ geht.

① c) $\Rightarrow$ allg. Lsg. $x(t) = \frac{Ct}{1+t}$

durch $P = (1/8)$ $\Rightarrow$ $x(1) = \frac{C}{2} = 8$

$\Leftrightarrow$ $C = 16$

$\Rightarrow$ Ges. Lsg. $x(t) = \frac{16t}{1+t}$

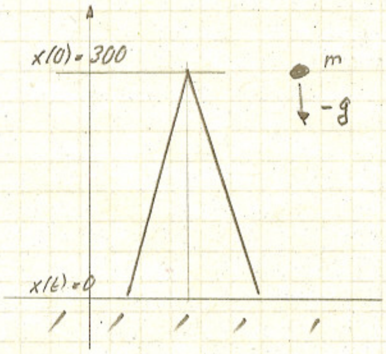
③ b) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\Rightarrow$ Beh.: $x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$, $A > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ ist Lsg.

Beweis: $\dot{x}(t) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\ddot{x}(t) = -A \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$

$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = -A \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) + \omega_0^2 \cdot A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) = 0$ □

④



$\Rightarrow \ddot{x} = -g$

analog zur Theorie: $\underline{x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + C_1 t + C_2}$

Anfangsbedingungen:

(Starthöhe) $x(0) = 300 \Rightarrow C_2 = 300$

("freier Fall") $\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + 300}}$

a) nach 1 s $\Rightarrow$ m befindet sich auf der Höhe $x(1)$ über dem Boden

$x(1) = \ldots = 295{,}095$

$\Rightarrow$ er fällt $\underline{\underline{4{,}905 \text{ m}}}$ weit

b) nach 2 s $\Rightarrow$ m befindet sich auf der Höhe $x(2)$ über dem Boden

$x(2) = \ldots = \underline{\underline{280{,}38 \text{ m}}}$

c) Aufschlag $\Rightarrow x(t) = 0$, $t = ?$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} g t^2 + 300 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 = \frac{2 \cdot 300}{g} \Rightarrow \underline{\underline{t = 7{,}82 \text{ s}}}$

(Kontrolle: $x(7.82) = \ldots = 0.047\ldots$ ✓)

d) ~> Zur allg. Lsg. der Bewegungsgleichung gehören nun die folgenden Bedingungen:

$x(0) = 300 \Rightarrow \underline{C_2 = 300}$

$x(3) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cdot g \cdot 9 + 3C_1 + 300 = 0$

$\Leftrightarrow 3C_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot 9 - 300$

$\Leftrightarrow \underline{C_1 = -85{,}285}$

$\Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 - 85{,}285 t + 300$

$\Rightarrow \dot{x}(t) = -gt - 85{,}285$

$\Rightarrow \underline{\dot{x}(0) = -85{,}285}$ $\Rightarrow$ Geschwindigkeit $= |\ldots| = \underline{\underline{85{,}285}}$ (m/s)