Analysis-Aufgaben: Kurven & Flächen im Raum 4

① $\vec{r}: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, mit $\vec{r}(u,v) := \begin{pmatrix} u \\ v \\ 12\cdot\cos\left(\frac{u^2+v^2}{4}\right) : (3+u^2+v^2) \end{pmatrix} \quad \left(= \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} \right)$

a) Koord.gleichung der T'ebene T, an der Stelle (1/1):

i) Parameterdarstellung:

· Ortsvektor $\vec{r}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{12\cdot\cos(0{,}5)}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2{,}106 \end{pmatrix}$

· Richtungsvektoren: $\partial_u \vec{r}(1,1)$, $\partial_v \vec{r}(1,1)$

$$\cdot\ \partial_u z(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{12\cdot\cos\left(\frac{u^2+v^2}{4}\right)}{3+u^2+v^2}\right) = \frac{-12\cdot\sin\left(\frac{u^2+v^2}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot 2u\cdot(3+u^2+v^2) - 12\cdot\cos\left(\frac{u^2+v^2}{4}\right)\cdot 2u}{(3+u^2+v^2)^2}$$

$$= \frac{-6\cdot\sin\left(\frac{u^2+v^2}{4}\right)\cdot u(3+u^2+v^2) - 24u\cdot\cos\left(\frac{u^2+v^2}{4}\right)}{(3+u^2+v^2)^2}$$

$$\Rightarrow \partial_u \vec{r}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-6\cdot\sin(0{,}5)\cdot 1\cdot 5 - 24\cdot 1\cdot\cos(0{,}5)}{5^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1{,}418 \end{pmatrix}$$

$$\cdot\ \partial_v z(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{12\cdot\cos\left(\frac{u^2+v^2}{4}\right)}{3+u^2+v^2}\right) = \frac{-6\cdot\sin\left(\frac{u^2+v^2}{4}\right)\cdot v\cdot(3+u^2+v^2) - 24v\cdot\cos\left(\frac{u^2+v^2}{4}\right)}{(3+u^2+v^2)^2}$$

$$\Rightarrow \partial_v \vec{r}(1,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1{,}418 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2{,}106 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1{,}418 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1{,}418 \end{pmatrix}$$

ii) Koord.gleichung: $\partial_u \vec{r}(1,1) \times \partial_v \vec{r}(1,1) = \begin{pmatrix} 1{,}418 \\ 1{,}418 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E: 1{,}418x + 1{,}418y + z = d$

$(1/1/2{,}106) \in E \Rightarrow d = 4{,}942$

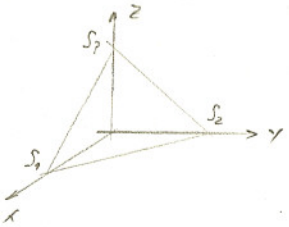
gesundet

$\Rightarrow E: 142x + 142y + 100z = 494$

(durch Elimination: $\left.\begin{array}{lll} x = 1+t & \Leftrightarrow & t = x-1 \\ y = 1+s & \Leftrightarrow & s = y-1 \\ z = 2{,}106 - 1{,}418t - 1{,}418s & & \end{array}\right\} \Rightarrow z = 2{,}106 - 1{,}418(x-1) - 1{,}418(y-1)$

$\Leftrightarrow$ ⋮

3) Spurpunkte & Spur in der xy-Ebene, (mit $E: 142x + 142y + 100z = 454$)



für S_1 gilt: y- & z-Koord. = 0

$S_1 = (x/0/0) \in E \Leftrightarrow 142x = 454$

$\Rightarrow \underline{S_1 = (3.475/0/0)}$

analog folgt: $\underline{S_2 = (0/3.475/0)}$, $\underline{S_3 = (0/0/4.54)}$

Spur in der xy-Ebene: $z = 0 \Leftrightarrow 142x + 142y = 454$

$\Leftrightarrow \underline{y = -x + 3.475}$

c) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t^2 \end{pmatrix}$ trifft wann, wo, ... die Tangentialebene:

Wann: $\vec{0r} \in T \Leftrightarrow 142 \cdot \sin t + 142 \cdot \cos t + 100 t^2 = 454$

$\Rightarrow \underline{t_1 = -2.622, \quad t_2 = 2.705}$

Wo: t_1: $P_1 = (-0.456/-0.868/6.877)$

t_2: $\underline{P_2 = (0.858/-0.513/4.445)}$

$|\vec{v}|$: $\dot{\vec{r}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 2t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{r}}(t_1) = \begin{pmatrix} -0.868 \\ 0.456 \\ -5.245 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v_1} = |\dot{\vec{r}}(t_1)| = \underline{5.335}$

$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t_2) = \begin{pmatrix} -0.513 \\ -0.858 \\ 4.248 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{v_2} = |\dot{\vec{r}}(t_2)| = \underline{4.336}$

Schnittwinkel: $\underline{t_1} \Rightarrow \varphi_1 = \arccos\left(\frac{\dot{\vec{r}}(t_1) \cdot \vec{n_E}}{|\dot{\vec{r}}(t_1)| \cdot |\vec{n_E}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-577.342}{1'187.895}\right) = 2.074 = 118.845°$

$\Rightarrow \underline{\varphi_1 = 61.155°}$

$\underline{t_2} \Rightarrow \underline{\varphi_2} = \arccos\left(\frac{\dot{\vec{r}}(t_2) \cdot \vec{n_E}}{|\dot{\vec{r}}(t_2)| \cdot |\vec{n_E}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{227.136}{572.635}\right) = 1.335 = \underline{76.455°}$

d) $\vec{r}(t) \cap \vec{r}(u,v)$: $\vec{r}(t) = \vec{r}(u,v) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \sin t = u \\ \cos t = v \\ t^2 = \frac{12 \cdot \cos\left(\frac{u^2+v^2}{4}\right)}{3+u^2+v^2} \end{array}\right\}$

$\Rightarrow t^2 = \frac{12 \cdot \cos\left(\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{4}\right)}{3 + \sin^2 t + \cos^2 t} = \frac{12 \cdot \cos(0.25)}{4}$

$\Rightarrow \underline{t_1 = -1.705}, \quad \underline{t_2 = 1.705}$

$\Rightarrow$ Durchstoßpunkte t_1: $\underline{P_3 = (-0.551/-0.134/2.907)}$

t_2: $\underline{P_4 = (0.551/-0.134/2.907)}$

e) <u>"höchster" Punkt</u>: z-Komponente = max

$$\Leftrightarrow \frac{12 \cdot \cosh\left(\frac{u^2+v^2}{4}\right)}{3+u^2+v^2} = \max$$

$$\Rightarrow \cosh = \max \Leftrightarrow \cosh = 1$$

$$\Leftrightarrow u^2+v^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{u = v = 0} \Rightarrow \text{Nenner am Klammer!}$$

$\Rightarrow$ <u>Ortsvektor für höchsten Pkt.</u>: $\vec{r}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Abstand zur xy-Ebene: $\underline{\underline{4}}$

Seite 4