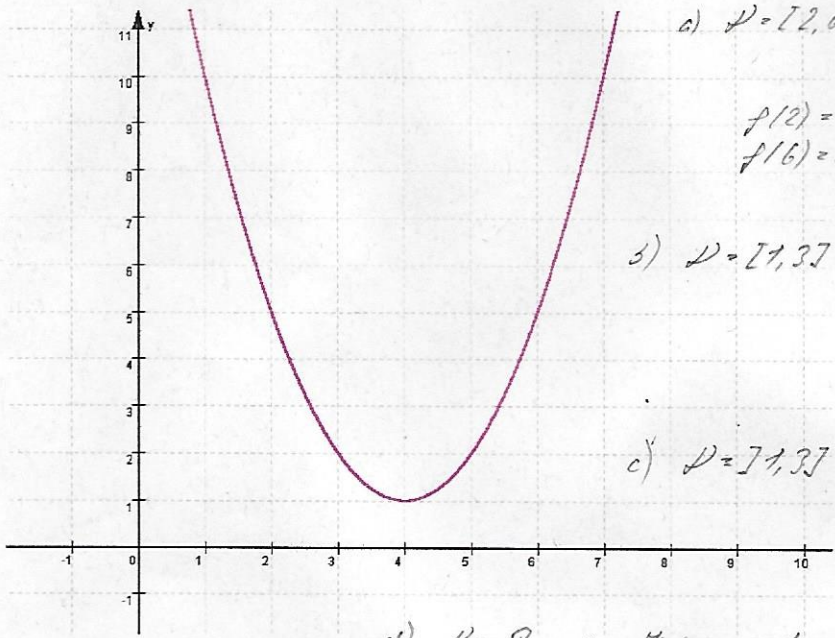
3

1. $f(x) = x^2 - 8x + 17 \Rightarrow S = (4/1)$



a) $D = [2,6] \Rightarrow$ Minimum $= 1$ an der Stelle $x_1 = 4$

$\left.\begin{array}{l} f(2) = 5 \\ f(6) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Maximum $= 5$ an den Stellen $x_2 = 2$, $x_3 = 6$

b) $D = [1,3] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(1) = 10 \\ f(3) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ Maximum $= 10$ an der Stelle $x_4 = 1$

Minimum $= 2$ an der Stelle $x_5 = 3$

c) $D =]1,3] \Rightarrow$ · Minimum $= 2$ in $x_5 = 3$

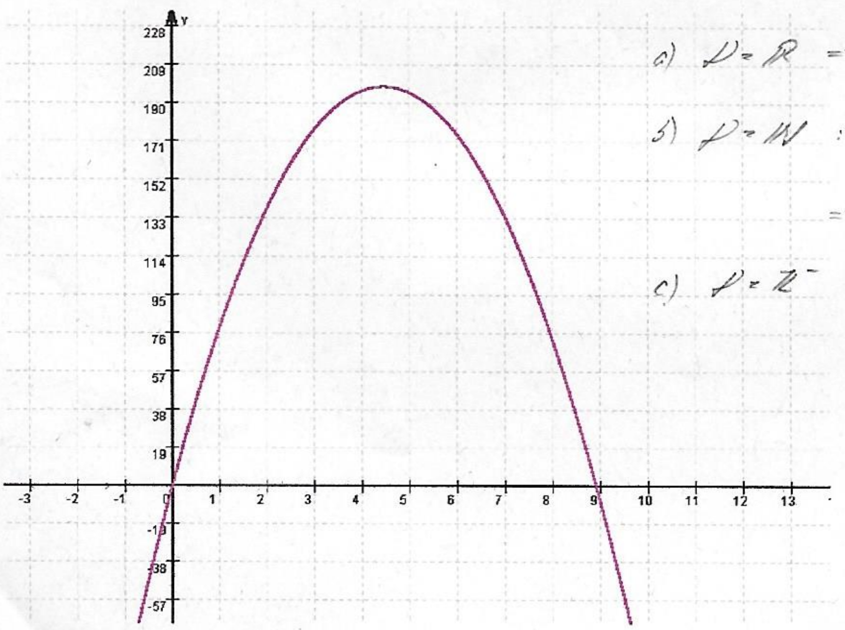
· Maximum ex. nicht!

(es ex. nur eine kleinste obere Schranke $= 10$)

d) $D = \mathbb{R} \Rightarrow$ Minimum $= 1$ in $x_1 = 4$

Maximum ex. nicht!

2. $g(x) = -10x^2 + 89x \Rightarrow S = (4{,}45 / 198{,}025)$



a) $D = \mathbb{R} \Rightarrow$ max. an der Stelle $x_1 = 4{,}45$

b) $D = \mathbb{N}$: $g(4) = 196$, $g(5) = 195$

$\Rightarrow$ max. an der Stelle $x_2 = 4$

c) $D = \mathbb{Z}^- \Rightarrow$ max. an der Stelle $x_3 = -1$

③ $x := 1.$ Zahl
$y := 2.$ Zahl mit $x = y + 8$

c) i) $\underline{x \cdot y = f(x,y)}$ $\Rightarrow$ mit $\underline{D(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}}$, $\underline{W(f) = \mathbb{R}}$

ii) $x \cdot y = \underline{(y+8) \cdot y = g(y)}$ $\Leftrightarrow$ $g(y) = y^2 + 8y$, mit $S = \left(-\frac{8}{2 \cdot 1} \middle/ 0 - \frac{8^2}{4 \cdot 1}\right) = (-4/-16)$

$\Rightarrow \underline{D(g) = \mathbb{R}}, \underline{W(g) = [-16, \infty[}$

iii) $x \cdot y = \underline{x \cdot (x-8) = h(x)}$ $\Leftrightarrow$ $h(x) = x^2 - 8x$, mit $S = \left(-\frac{(-8)}{2 \cdot 1} \middle/ 0 - \frac{(-8)^2}{4 \cdot 1}\right) = (4/-16)$

$\Rightarrow \underline{D(h) = \mathbb{R}, \quad W(h) = \mathbb{R}_{\geq -16}}$

④ x, y, mit $x - y = 4$ und $x^2 + y^2 = \min$ $\Big\} \Rightarrow x^2 + (x-4)^2 = \min$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 16 = \min$

$\overset{x\text{-Koord.}}{\Leftrightarrow}_{\text{Scheitelpkt}}$ $\underline{x = 2}$ $\Rightarrow$ $\underline{y = (-2)}$ (Zahlenpaar)

$\Rightarrow$ das Minimum ist 8

(oder direkt: gesuchtes Min. $\hat{=}$ y-Koord. des Scheitelpktes)

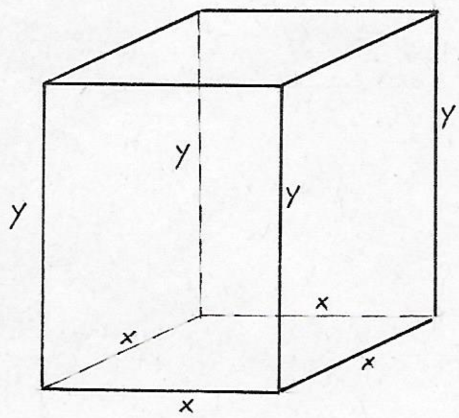
⑤ x, y, mit $2x + 3y = 5$ und $x \cdot y = \max$ $\Big\} \Rightarrow x \cdot \left(\frac{5-2x}{3}\right) = \max$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} x^2 + \frac{5}{3} x = \max$

$\overset{y\text{-Koord.}}{\Rightarrow}_{\text{Scheitelpkt.}}$ $\underline{\text{Maximum} = 25/24}$

(oder über die Bestimmung von $x = 5/4$ $\Rightarrow y = 5/6$ $\Big\} \Rightarrow \text{Max} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} = 25/24$)

⑥



Summe aller Kanten: $4x + 4y + 4x = 24$
$\Leftrightarrow \underline{8x + 4y = 24\,cm}$

Oberfläche: $x^2 + 4 \cdot xy + x^2 = \max$
$\Leftrightarrow \underline{2x^2 + 4xy = \max}$ $\Big\} \Rightarrow$

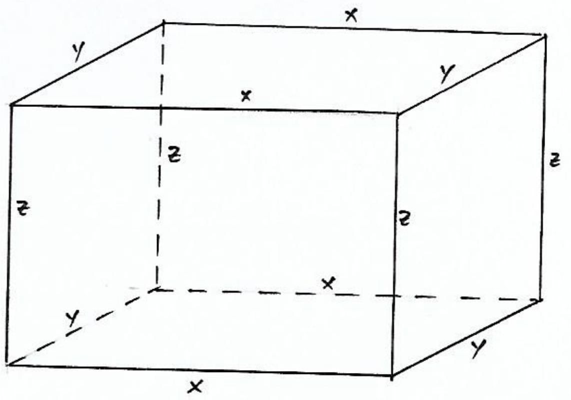
$\overset{4y = 24cm - 8x}{\Rightarrow}$ $2x^2 + x(24 - 8x) = \max$

$\Leftrightarrow -6x^2 + 24x = \max$

$\Leftrightarrow \underline{x = 2 \Rightarrow y = 2}$

Kantenlänge für eine max. Oberfläche: $\underline{x = 2cm}$
$\underline{y = 2cm}$

7



a) $O = 2\cdot xy + 2\cdot xz + 2\cdot yz = O(x,y,z)$

$x = 4y$
$4x + 4y + 4z = 84$

$\Rightarrow 4\cdot 4y + 4y + 4z = 84$
$\Leftrightarrow 4z = 84 - 20y$
$\Leftrightarrow z = 21 - 5y$

$\Rightarrow O = 2\cdot 4y\cdot y + 2\cdot 4y\cdot(21-5y) + 2y\cdot(21-5y)$
$= 8y^2 + 168y - 40y^2 + 42y - 10y^2$
$= -42y^2 + 210y = O(y)$

$\Rightarrow$ Scheitelpunkt für $O(y) = (2.5/262.5)$ $\left(= \left(-\frac{210}{2\cdot(-42)} \,/\, 0 - \frac{210^2}{4\cdot(-42)}\right)\right)$

$\Rightarrow$ max Oberfläche $= 262.5\,cm^2$ (mit $y = 2.5cm$, $x = 10cm$, $z = 8.5cm$)

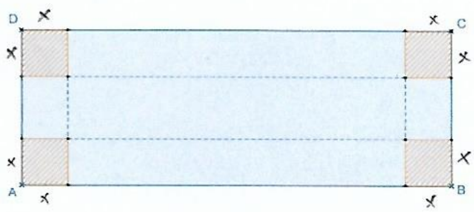
b) $V = x\cdot y\cdot z = 4y\cdot y\,(21-5y) = 84y^2 - 20y^3 = V(y)$

Polynomfkt 3. Grades $\Rightarrow$ Extremes graphisch (mit GeoGebra) bestimmen

$\Rightarrow V_{max} = 219{,}520\,cm^3$ (mit $y = 2.8cm$, $x = 11.2cm$, $z = 7cm$)

8. Aus einer rechteckigen Fläche ($\overline{AB} = 28cm, \overline{CD} = 10cm$) werden vier Quadrate herausgeschnitten. Der Rest wird zu einer Schachtel ohne Deckel gefaltet:

$\forall x: x \in [0,5]$



$\Rightarrow$ a) G ist max für $x = 0$
$\Rightarrow$ max Grundfläche $= 280\,cm^2$

b) S_x für $S(x) = 4{,}75 \in [0,5]$
$\Rightarrow$ max Seitenfläche $= 180{,}5\,cm^2$

c) $V(x)$ = Polynomfkt. 3 Grades
$\Rightarrow$ max. Vol $= 290{,}82\,cm^3$
mit GeoGebra (für $x = 2.237$)

Bestimme die Länge der herausgeschnittenen Quadrate, so dass

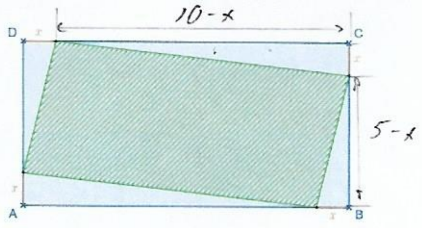
(a) die Grundfläche, $G = (28-2x)\cdot(10-2x) \overset{!}{=} max \Rightarrow G(x) = 4x^2 - 76x + 280 \overset{!}{=} max$

(b) die Seitenflächen, $S = 2\cdot(28-2x)\cdot x + 2\cdot(10-2x)\cdot x = -8x^2 + 76x = S(x) \overset{!}{=} max$

(c) das Volumen $V = G\cdot x = 4x^3 - 76x^2 + 280x = V(x) \overset{!}{=} max$

der Schachtel maximal wird.

9. Bestimme den minimalen Inhalt der schraffierten Fläche:
($ABCD$ ist ein Rechteck, mit $\overline{AB} = 10$ und $\overline{BC} = 5$)



$\Rightarrow x \in [0,5]$

Schraffierte Fläche = min $\Leftrightarrow$ Blaue Fläche = max

Blaue Fläche $= 2 \cdot \left(\frac{x \cdot (5-x)}{2}\right) + 2 \cdot \left(\frac{x \cdot (10-x)}{2}\right)$

$= 5x - x^2 + 10x - x^2$

$= -2x^2 + 15x \quad B(x) \overset{!}{=} \max$

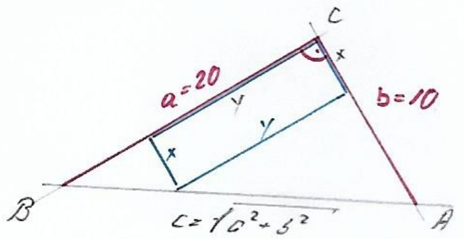
Scheitelpunkt von $B(x) = (3{,}75 / 28{,}125) \Rightarrow B_{max} = 28{,}125$

$\wedge$

$D(B) = [0,5]$ $\Rightarrow$ Schraff. (min) $= 10 \cdot 5 - B_{max}$

$= 21{,}875$

(10)



i) $A_{\square} = x \cdot y \overset{!}{=} \max$

ii) $a : y = b : (b-x) \Leftrightarrow y = \frac{a \cdot (b-x)}{b}$

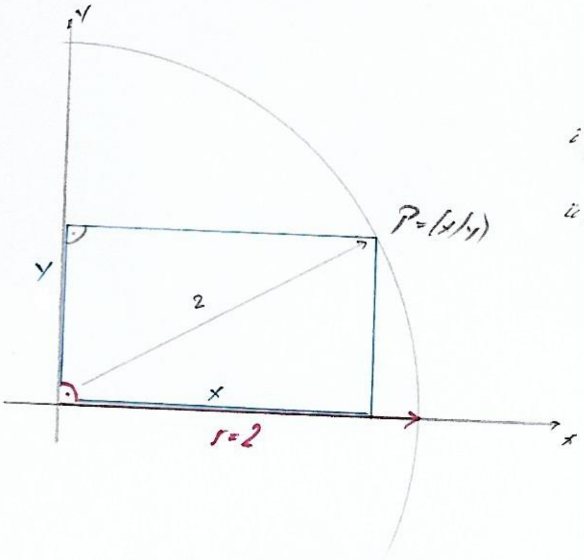
$\overset{i)}{\underset{ii)}{\Rightarrow}} \quad x \cdot \frac{a \cdot (b-x)}{b} = ax - \frac{a}{b}x^2 = 20x - 2x^2 = A(x) \overset{!}{=} \max$

$\Rightarrow S_A = (5 / 50)$

$\Rightarrow A_{max} = 50$

$\Rightarrow$ Restliche Fläche $= \frac{a \cdot b}{2} - A_{max} = 50$

(11)



i) $A_{\square} = x \cdot y \overset{!}{=} max$

ii) $P \in$ Kreisbogen.

$\forall P = (x|y) \in$ Kreisbogen: $x^2 + y^2 = r^2 = 4$

$\Leftrightarrow \quad y^2 = 4 - x^2$

$\Rightarrow \quad \underline{y = \sqrt{4 - x^2} = f(x)}$

analoge Betrachtung: Diagonale im Rechteck.

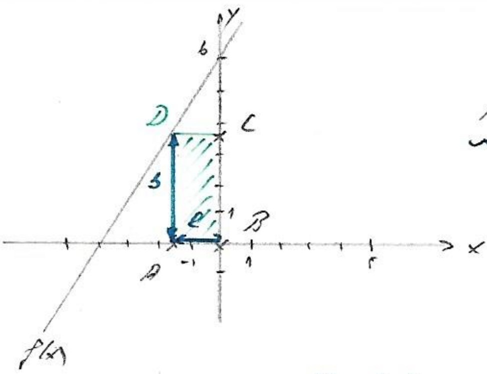
$d^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow \quad A_{\square} = x \cdot y$

$\underline{= x \cdot \sqrt{4 - x^2} = A(x) \overset{!}{=} max}$

Grafik $\Rightarrow \quad \underline{A_{max} = 2}$ mit $\underline{\underline{x = \sqrt{2}}} \Rightarrow \underline{\underline{y = \sqrt{2}}}$

(12)



$A_{\square ABCD} = a \cdot b$,

mit $a = x$ & $b = f(x)$

$= x \cdot f(x)$

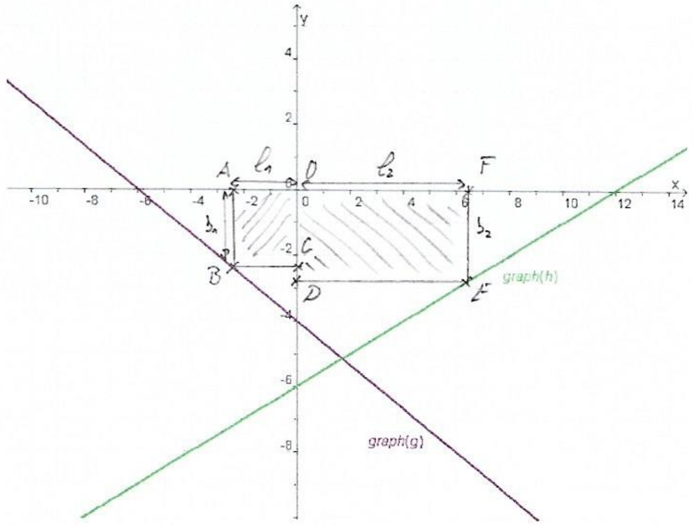
$= 1{,}5x^2 + 6x \overset{!}{=} max$

- Wir haben nun eine Gleichung, welche für jede eingesetzte Rechteckslänge $a = x$ den zugehörigen Flächeninhalt liefert.
- Der Flächeninhalt ist abhängig von x: $A_{\square ABCD}(x) = 1{,}5x^2 + 6x$
- Wir haben eine Funktion mit Namen $A_{\square ABCD}$
  abhängig von x
  vom Typ: quadratisch

für welche wir das x für den größten Wert suchen und im Scheitelpunkt finden.

$\Rightarrow \quad x = -2 \quad \Rightarrow \quad \underline{D} = (-2 \,|\, f(-2)) = \underline{\underline{(-2|3)}}$

(13)



$$\underline{A_{\square OABC}} = l_1 \cdot b_1$$
$(l_1 = x)$.
$$= x \cdot (-g(-x))$$
$$= x \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{2}{3} \cdot (-x) - 4\right)$$
$$= x \cdot (-1) \cdot \left(\frac{2}{3}x - 4\right)$$
$$= \underline{-\tfrac{2}{3} \cdot x^2 + 4x} \overset{!}{=} max$$

=> zugehöriger Scheitelpunkt: $S_1 = (3/6)$

=> Bei einer Länge von $l_1 = 3$ hat das Rechteck den max. Flächeninhalt $= 6$ (mit zugehöriger Breite $b_1 = -g(-3) = 2$)

=> $\underline{\underline{A = (-3/0)}}$

$$\underline{A_{\square ODEF}} = l_2 \cdot b_2 \quad , \quad l_2 = x$$
$$= x \cdot (-h(x))$$
$$= x \cdot (-1) \cdot (0{,}5x - 6) = \underline{-0{,}5x^2 + 6x} \overset{!}{=} max$$

=> zugehöriger Scheitelpunkt $S_2 = (6/18)$

(d.h. für $x = 6$ $(= l_2)$ hat die Fläche den max. Inhalt 18)

=> zugehörige Breite $= -h(6) = -(-3) = \underline{3}$

=> $\underline{\underline{D = (0/-3)}}$

(14) Lösung mit Schieberegler und Flächenfunktion

=> siehe zugehöriges GeoGebra-file (mit Navigationsleiste)

$$A_\Delta = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{(x+2) \cdot g(x)}{2} = A(x) \overset{!}{=} max$$

$$\Rightarrow \underline{A(x)} = (x+2) \cdot \frac{(-2x+10)}{2}$$

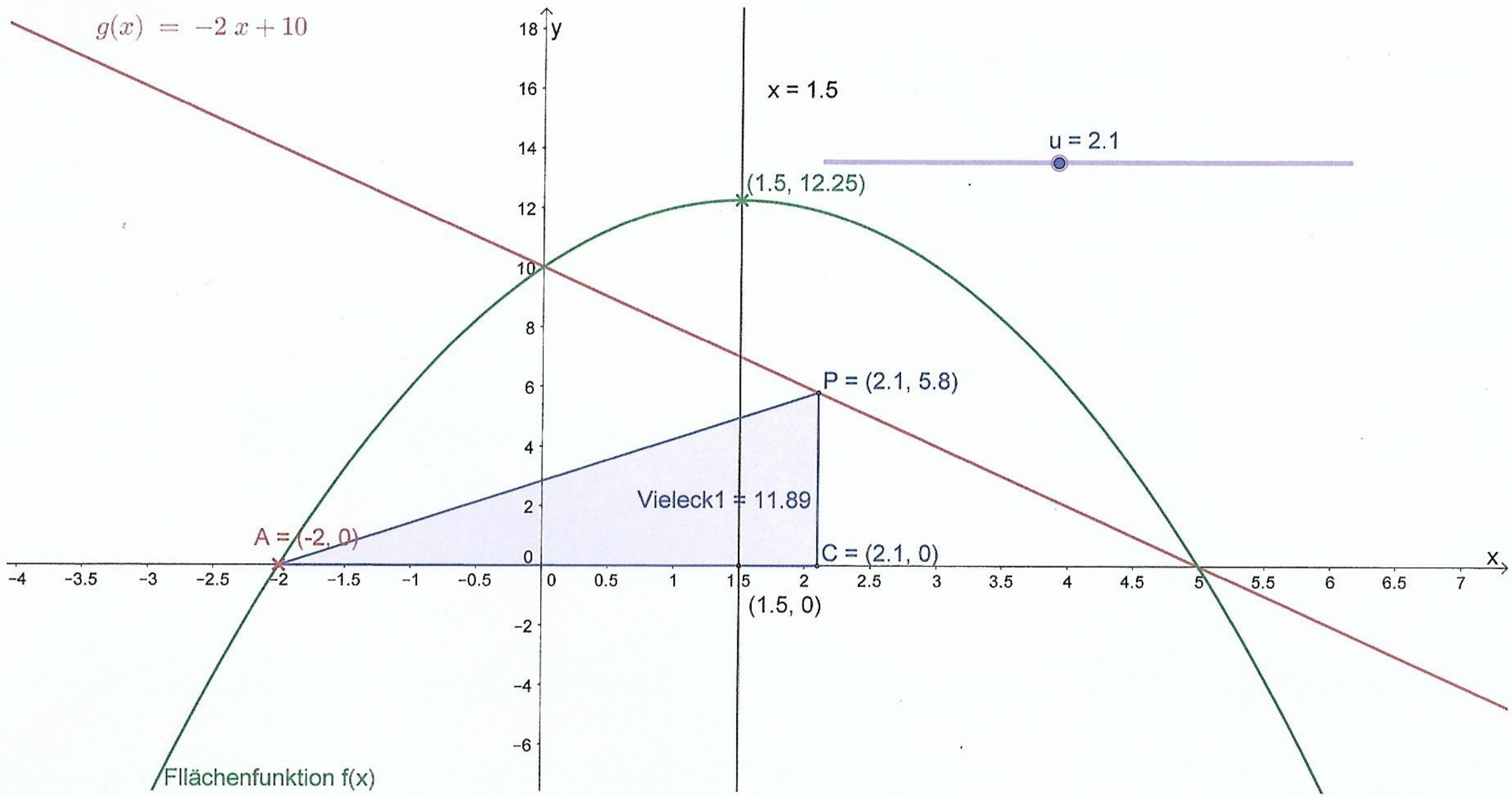
$$= (x+2)(-x+5) = \underline{-x^2 + 3x + 10} \quad \text{hat } S = \left(-\frac{3}{2 \cdot (-1)} \Big/ 10 - \frac{3^2}{4 \cdot (-1)}\right)$$

$$= \underline{(1.5 \ / \ 12.25)}$$

Da der quadrat. Koeff. von $A < 0$ ist, existiert über $D(A) = \mathbb{R}$ nur ein Maximum

=> $\underline{\underline{\text{max. Flächeninhalt} = 12.25}}$

Analysis-Aufgaben: Quadratische Funktionen 3 _ Aufg14



(15) Lösung mit Schieberegler & Distanzfunktion

⇒ siehe zugehörige ggb-file (mit Navigationsleiste)

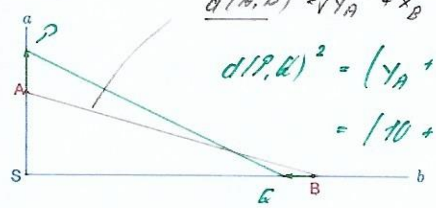
$d(P,Q) = f(x) - g(x) = \underline{0.5x^2 - 2x + 4 = d(x) \overset{!}{=} min}$

$\Rightarrow S = (2/2)$

$\Rightarrow$ <u>die Lage von P:</u> $\underline{\underline{x = 2}}$

16. Wir betrachten die folgende Situation:

<u>Bemerk.:</u>
Wir verwenden folgende Eigenschaft:
Die ES einer quadrat. Fkt. sind
die gleichen, wie die ES der Wurzel
dieser quadrat. Fkt.
(<u>Beweis</u>: später!
mit Hilfe der
Differentialrechnung)



$\underline{d(A,B)} = \sqrt{y_A^2 + x_B^2} = \sqrt{10^2 + 60^2} = \underline{60{,}828cm}$

$d(P,Q)^2 = (y_A + t \cdot v_A)^2 + (x_B - t \cdot v_B)^2$

$= (10 + t \cdot 4)^2 + (60 - t \cdot 2)^2$

$= 100 + 80t + 16t^2 + 3600 - 240t + 4t^2$

$= \underline{20t^2 - 160t + 3700 = d(t) \overset{!}{=} max}$

Die Punkte A und B bewegen sich auf den Geraden a und b mit den konstanten Geschwindigkeiten 4cm/s für A und 2cm/s für B in die angegebenen Richtungen. Weiter beträgt jetzt der Abstand von A zu S 10cm und der Abstand von B zu S 60cm.
Nach welcher Zeit ist $d(A,B)$ am kleinsten?

$\Rightarrow \underline{S = (4/3380)}$

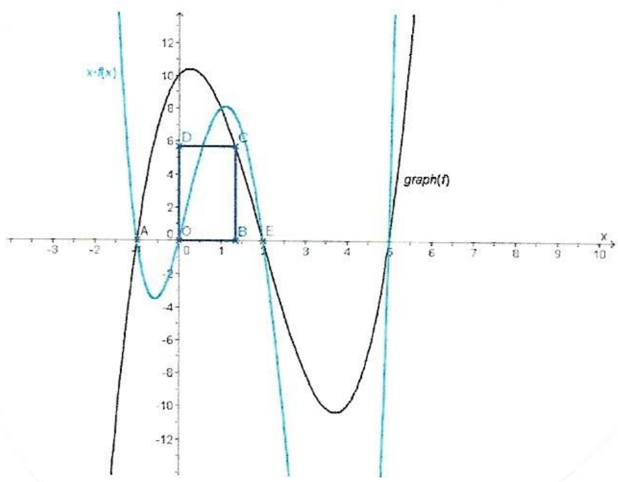
$\Rightarrow$ <u>min. Abstand nach 4s</u>

Der min. Abstand beträgt dann $\sqrt{3380}$
$= \underline{\underline{58{,}134cm}}$

(17) a) $f(x) = (x+1)(x-2)(x-5) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$

b) Für den Flächeninhalt gilt: $\underline{A} = x \cdot f(x) = \underline{x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 10x}$

<u>geogebra</u> ⇒



$\Rightarrow \underline{max.\ Fläche = 8{,}11}$

für $x = 1{,}11$

Analysis-Aufgaben: Quadratische Funktionen 3 _ Aufg15