$$\det A = \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \vec{a}_j = (a_{j1}\ a_{j2}\ a_{j3} \cdots a_{jn}) \in M(1\times n, \mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad j\text{-te Zeile}$$

5.8.7 Die Berechnung der Determinante mit Hilfe von Gauss

Wir haben dieses Kapitel mit dem Gauβ-Algorithmus begonnnen, und wollen ihn nun abschliessend auch zur Bestimmung der Determinante einer beliebigen Matrix verwenden.

Wir formulieren die Eigenschaften der Determinante in der transponierten Darstellung, also mit Zeilenvektoren:

$$\det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_j + \vec{a}_j{}' \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_j{}' \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \lambda \vec{a}_j \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_j \\ \vdots \\ \vec{a}_n \end{pmatrix}$$

und arbeiten folgendes Beispiel durch:

Beispiel 5.17 $\det A$, *mit* $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\vec{a}_j = (a_{j1}\ a_{j2} \cdots a_{jn})$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \begin{array}{l} \vec{a}_1 = (4\ -3\ 7) \\ \vec{a}_2 = (3\ 0\ 2) \\ \vec{a}_3 = (2\ 0\ -1) \end{array}$$

$$\downarrow\ 2\,III - I$$

$$\det A' = \det \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ 2\vec{a}_3 - \vec{a}_1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_1 \end{pmatrix} = \underline{2 \cdot \det A}$$

$$\downarrow\ 4\,II - 3\,I$$

$$\det A'' = \det \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 0 & 9 & -13 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1{}' \\ 4\vec{a}_2{}' - 3\vec{a}_1{}' \\ \vec{a}_3{}' \end{pmatrix} = 4 \cdot \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1{}' \\ \vec{a}_2{}' \\ \vec{a}_3{}' \end{pmatrix} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1{}' \\ \vec{a}_1{}' \\ \vec{a}_3{}' \end{pmatrix} = \underline{4 \cdot \det A'}$$

$$\downarrow\ II - 3\,III$$

$$\det A''' = \det \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 14 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1{}'' \\ \vec{a}_2{}'' - 3\vec{a}_3{}'' \\ \vec{a}_3{}'' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1{}'' \\ \vec{a}_2{}'' \\ \vec{a}_3{}'' \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1{}'' \\ \vec{a}_3{}'' \\ \vec{a}_3{}'' \end{pmatrix} = \underline{\det A''}$$

$$\downarrow\ II \leftrightarrow III$$

$$\det A'''' = \underbrace{\det \begin{pmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}}_{= 4\cdot 3\cdot 14 = 168} = \det \begin{pmatrix} \vec{a}_1{}''' \\ \vec{a}_3{}''' \\ \vec{a}_2{}''' \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \vec{a}_1{}''' \\ \vec{a}_2{}''' \\ \vec{a}_3{}''' \end{pmatrix} = \underline{-\det A'''}$$

$\det A = \tfrac{1}{2} \cdot \det A'$ ⇐

$\det A' = \tfrac{1}{4} \cdot \det A''$ ⇐

$\det A'' = \det A'''$ ⇐

$\det A''' = -\det A''''$ ⇐

$$\Rightarrow \underline{\det A} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 14) = \underline{-21}$$