Def.: $\vec{a}_j$ läßt sich darstellen als eine Linearkombination der $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

$:\Leftrightarrow \exists \lambda_i \in \mathbb{R}: \vec{a}_j = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \sum_i \lambda_i a_i$

Bsp. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Der vorherige Satz lässt sich noch zu folgender Aussage verallgemeinern:

Satz: Die Determinante einer Matrix, in welcher sich eine Spalte als eine Linearkombination der anderen Spalten darstellen lässt, verschwindet.

Formuliere ein eigenes Beispiel:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \cdot 2 + 1 & 1 \\ 1 & 2 \cdot 1 + (-1) & -1 \\ -1 & 2 \cdot (-1) + 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \cdot 2 & 1 \\ 1 & 2 \cdot 1 & -1 \\ -1 & 2(-1) & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 0 + 0$$

Beweis: $\det A = \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n)$

$$= \det\left(\vec{a}_1, \dots, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n\right) \quad , i \neq j$$

$$= \det(\vec{a}_1, \dots, \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n, \dots, \vec{a}_n)$$

$$= \lambda_1 \cdot \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) + \lambda_2 \cdot \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) + \dots + \lambda_n \cdot \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \dots, \vec{a}_n)$$

$$= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \dots + \lambda_n \cdot 0$$

$$= 0$$

□

Ohne Beweis wollen wir noch die folgenden Eigenschaften festhalten: hier: [illegible]

Satz:

- Die Determinante einer Matrix in Dreiecksform ist gleich dem Produkt der Diagonalelemente:

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- $\det A = \det A^T$