Funktionen (Grundlagen)

die Begleitschrift zu einem *Lernvideo*

zur Einführung des Funktionsbegriffes

auf der Grundlage von *Werten von Polynomen*

Ronald Balestra
CH - 8046 Zürich
www.ronaldbalestra.ch

20. Januar 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Von der Werten von Polynomen zum Begriff der Funktion **3**

2 Die Wertetabelle und graphische Darstellung **5**

3 Die Definition einer Funktion **6**

4 Ein neues Beispiel **8**

5 Eine erste Zusammenfassung **9**

6 Das Arbeiten mit dem Graphen **10**

7 Die Seerosen auf einem Teich **13**

Die Idee dieser Begleitschrift ...

Das Lernvideo ist auf der Grundlage dieser Schrift aufgebaut ...,

das soll den SchülerInnen eine Möglichkeit bieten, dem Video zu folgen und meine Ergänzungen an einer dem Verlauf angepassten Stelle schriftlich festhalten zu können.
Das betrifft natürlich auch die von mir gemachten mündlichen Ergänzungen und Bemerkungen und insbesondere die schülerInneneigenen Überlegungen und Gedanken.

Das Lernvideo selber ist als eine *Unterstützung* zu meiner Einfürung in das Thema der Funktionen auf UG-Stufe gedacht.
Es kann sowohl zur *Vorbereitung* und Einstimmung in das Thema und/oder auch als zur *Nachbearbeitung* verwendet werden. Selbstverständlich dient es auch zur *Wiederauffrischung*.

Ergänzt wird diese Schrift mit *Links* zu dazugehörigen Aufgabenserien. Ebenso zu einer Einführung in die Verwendung von *GeoGebra* im Bereich der Funktionen, welche im Selbststudium durchgearbeitet werden kann.

Ganz wichtig ist das dazugehörige *F & A - Dokument*, erstellt auf www.edupad.ch. Dieses Dokument ermöglicht den SchülerInnen auch einen zeit- & ortsunabhängigen Austausch von Fragen & Antworten auf digitaler Basis, insbesondere auch von Lösungen.
Es dient als Plattform einer digitalen kooperativen Lernumgebung und sollte von den SchülerInnen ernsthaft genutzt werden.

Die angesprochenen Links ... für die Klasse U2a, FS 2021/22

- das *F & A - Dokument* auf Edupad
- zur Aufgabenserie 7 (Aufgaben und Lösungen)
- *Funktionen 2* - die Ergänzung zur Serie 7
  und die zugehörigen Lösungen sind hier zu finden.
- zu einer Einführung in *Funktionen und GeoGebra*
  Die zugehörigen Aufgaben und Lösungen sind hier zufinden.

Die Funktionen

Mit dem Begriff der *Funktion* werden wir ein Hilfsmittel der Mathematik kennenlernen, welches von zentraler Bedeutung ist und uns auf dem Weg durch die Gymnasiale Ausbildung immer wieder begegnen und begleiten wird.
Mit Hilfe von Funktionen lassen sich Bewegungsabläufe oder Veränderungen beschreiben, Vorhersagen über das Bevölkerungswachstum machen, die Bahn eines Satelliten im Weltraum berechnen, ... und vieles vieles mehr.

Mathematisch betrachtet ist eine Funktion nichts anderes als

eine *Vorschrift*,
die *jedem* Element aus der einen Menge
genau ein Element in einer anderen Menge *zuordnet*.

Wir werden in dieser Lerneinheit die Grundbegriffe besprechen, auf welchen die späteren Anwendungen und vertiefenden Diskussionen von Funktionen aufbauen werden.
Dabei wird auch ein grosser Wert auf die Sprechweisen und Darstellungsformen gelegt.

1 Von der Werten von Polynomen zum Begriff der Funktion

In der Algebra, Kapitel 7 *Termumformungen 1. Teil* haben wir den Begriff des *Polynoms* kennengelernt, ebenso das Bestimmen von *Werten von Polynomen.*

Dazu betrachten wir das folgende Polynom:

$$(x+3)(x^2+2)$$

Wir können den Wert des Polynoms für $x = 1$ berechnen:

ebenso den Wert des Polynoms für $x = 5$:

Wir erhalten so jeweils einen *Wert* des Polynoms, der *abhängig ist* von dem Wert, den wir für unser x einsetzen.

Wir fassen das Wichtigste zusammen:

- Die Werte des Polynoms
  - wobei x eine *Variable* ist
  - und ein *Argument*
- Die Berechnung der Werte *hängt ab,*
  - von der Wahl des Argumentes
  - und dem Polynom selber

Wichtig auch die Sprechweisen und deren Bedeutungen ...

- $p(x)$

- $p(1)$

- $p(1) = 12$

2 Die Wertetabelle und graphische Darstellung

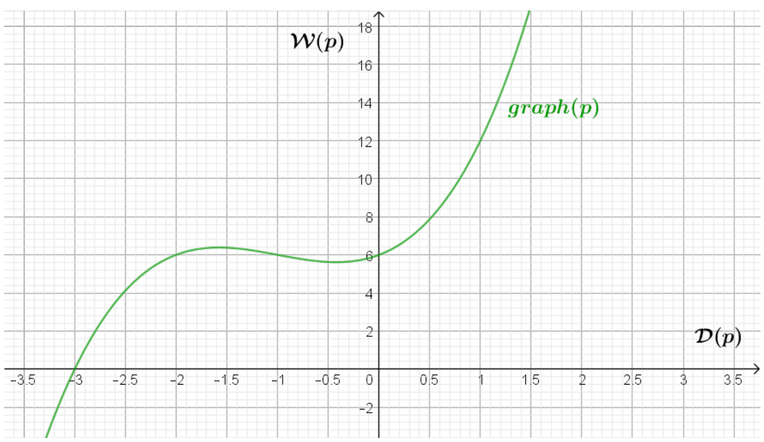
Wir arbeiten immer noch mit unserem Beispiel:

$$p(x) = (x + 3)(x^2 + 2)$$

Die Zuordnung eines Wertes zu einem Argument können wir auch gut in einer *Wertetabelle* erkennen:

x	-3	-2	-1	0	1	2	5
$p(x)$	0	6	6				216

Die Zuordnung können wir auch in der *graphischen Darstellung* erkennen:



- $\mathcal{D}(p) :=$

- $\mathcal{W}(p) :=$

3 Die Definition einer Funktion

<u>Def.:</u>	Eine **Funktion** ist eine *Vorschrift*, die *jedem* Argument *genau einen* Funktionswert *zuordnet.*

Wir geben der Funktion den *Namen*

verwenden als *Variable*

und verwenden als *Vorschrift*

Etwas ausführlicher lässt sich eine Funktion wie folgt definieren:

<u>Def.:</u>	Eine **Funktion** $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ ist eine *Vorschrift*, die *jedem* Element aus $\mathbb{A}$ *genau ein* Element in $\mathbb{B}$ *zuordnet.*

$$\text{mit} \quad \mathbb{A} = \mathcal{D}(f) \;\text{ und }\; \mathbb{B} = \mathcal{W}(f)$$

Ein ausführliches Beispiel:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}\ , \quad f(x) = 2x^2 + \frac{20}{x} - 5$$

- hat als Definitionsbereich
- hat als Wertebereich

- $f(2) =$
- $f(3) =$
- $f(4) =$
- $f(20) =$
- $f(0) =$
- $f(-2) =$

Aufgaben 1 *Einige Aufgaben mit Berücksichtigung des Definitions- und Wertebereichs:*

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \text{mit} \quad f(x) = 3x - 5$
   (a) $f(10) =$
   (b) $f(2) =$
   (c) $f(0) =$
   (d) $f(25) =$
   (e) $f(-2) =$
   (f) $f(t) =$

2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad \text{mit} \quad g(x) = 3x^2 - 2x$
   (a) $g(2) =$
   (b) $g(0) =$
   (c) $g(-3) =$
   (d) $g(4) =$
   (e) $g(-5) =$
   (f) $g(v) =$

3. $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}^+, \quad \text{mit} \quad h(t) = \dfrac{-x^2 + 4x}{2x + 1}$
   (a) $h(1) =$
   (b) $h(-2) =$
   (c) $h(4) =$
   (d) $h(-0.5) =$
   (e) $h(x) =$
   (f) $h($😎$) =$

4 Ein neues Beispiel

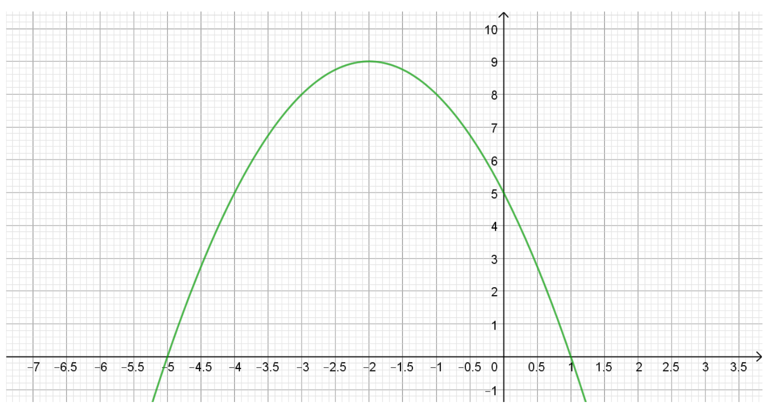
Wir arbeiten nun mit einem weiteren, neuen Beispiel:

$$f(t) = -t^2 - 4t + 5$$

Die zugehörige *Wertetabelle*:

t	-3	-2	-1	0	1	3	5
$f(t)$	8	9	8				-40

Die zugehörige *graphische Darstellung*



- Sprechweisen/Darstellung

- Neue Fragen:

- Eigenschaften:

5 Eine erste Zusammenfassung

Du solltest nun in der Lage sein, die folgenden Begriffe zu definieren und zu erklären:

- $f : \mathcal{D}(f) \to \mathcal{W}(f)$ heisst eine **Funktion** $\Leftrightarrow$:

- Variable

- Argument

- Name der Funktion

- Abhängigkeit

- Die Sprechweise für $g(s) = s^3 - 5s$

- (Funktions-) Wert

- Für was stehen die Mengen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ in der folgenden Darstellung:

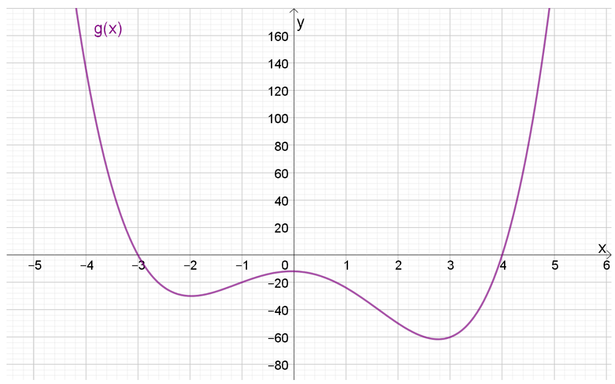
$$f : \mathbb{A} \to \mathbb{B} \,, \qquad \text{wenn } f \text{ eine Funktion ist.}$$

- Stelle

- Funktionsgleichung $\leftrightsquigarrow$ Funktionszuordnung

6 Das Arbeiten mit dem Graphen

Einige Fragen, für welche die graphische Darstellung eine Antwort bieten kann:



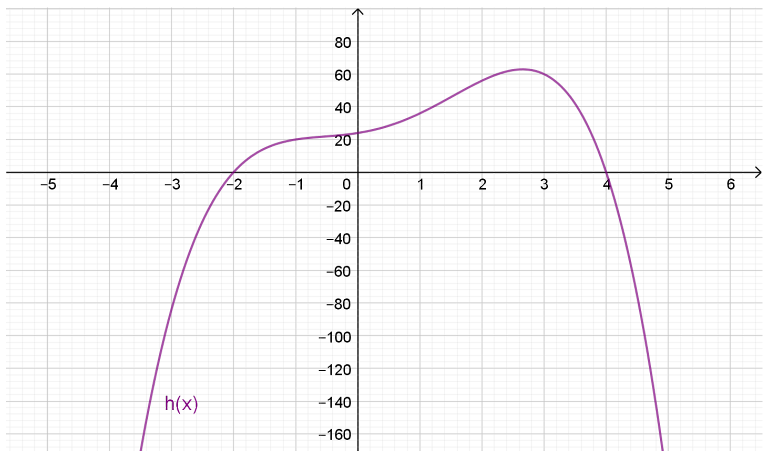
Die graphische Dartellung ermöglicht uns (auch ohne das Wissen der Funktionsgleichung) folgende Fragen zu beantworten:

- $g(2) =$
- Der Wert von g an der Stelle 2 ist gleich ...
- Der Wert von g für das Argument $x = 2$ ist gleich ...
- Der $2 \in \mathcal{D}(g)$ wird der Funktionswert zugeordnet.

- $g(x) = 100 \;\Rightarrow\; x = \;\ldots$
- Bestimme die Stellen, an welcher g den Wert 160 hat:
- Bestimme die Argumente, für welche g den Wert -20 hat:
- Löse die folgende Gleichung: $g(x) = -80$

Aufgaben 2 *Einige Aufgaben zur Anwendung des Graphen:*

Für die folgenden Aufgaben verwenden wir diese graphische Darstellung der Funktion $h(x)$



1. $h(3) =$

2. $h(0) =$

3. Bestimme den Funktionswert an der Stelle -3:

4. Für welche Argumente ist der Funktionswert -100 ?

5. Löse die folgende Gleichung: $h(x) = 40$

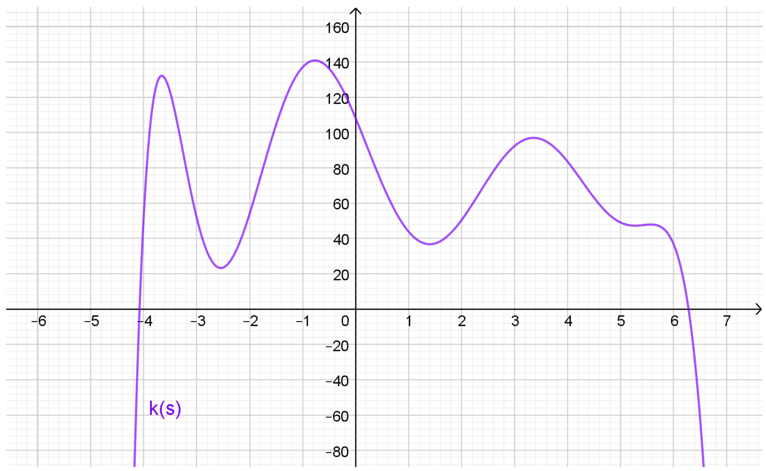
6. Löse die folgende Gleichung: $h(x) = 0$

7. Bestimme die Stelle, an welcher h den grössten Wert hat.
   Was ist der grösste Wert?

8. $\{x \in \mathcal{D}(h) \;\mid\; h(x) = 80\}$

Aufgaben 3 *Einige Aufgaben zur Anwendung des Graphen:*

Wir verwenden die folgende graphische Darstellung:



Arbeite nur mit der graphischen Darstellung:

- Beschrifte die Achsen
- $k(0) =$
- $k(s) = -20 =$
- $k(4) =$
- $k(s) = 160 =$
- $k(s) = 120 =$
- $\{s \in \mathbb{R} \mid k(s) = 0\}$
- $\{s \in \mathbb{R} \mid k(s) = 160\}$
- $k(s+2) = 20$
- Bestimme den Wert von k an der Stelle 5.
- Bestimme die Argumente für den Funktionswert 100.

Mit dem zugehörigen *GeoGebra - file* kannst du die Genauigkeit deiner *abgelesenen* Resultate selber überprüfen oder du vergleichst mit den Resultaten Deiner MitschülerInnen auf dem *f & A* - Dokument.

7 Die Seerosen auf einem Teich

Wir gehen von einem Teich aus, der heute morgen um 08:00 zu 15% mit einem Teppich aus Seerosen bedeckt ist. Dieser Teppich vergrössert sich stetig, er verdoppelt sich alle drei Stunden.

Die Funktion (ohne Herleitung), welche diesen zeitabhängigen Wachstumsprozess beschreibt lautet:

$$f(t) = 15 \cdot 2^{t/3}$$

Der zugehörige Graph:

Aufgaben, welche sich mit Hilfe der Funktionsgleichung und der graphischen Darstellung lösen lassen:

- Zu wieviel % ist der Teich nach vier Stunden mit Seerosen bedeckt ?

- Um 14Uhr ist der Teich zu wieviel Prozent bedeckt ?

- Wann ist der Teich zur Hälfte bedeckt ?

- Nach wie vielen Stunden sind noch 10 % des Teiches frei ?

- Vor wie vielen Stunden waren 10% des Teiches bedeckt ?

- Vor wie vielen Minuten waren 92.5% des Teiches seerosenfrei ?